DISUGUAGLIANZA DI FEFFERMAN-POINCARE E REGOLARITA' PER EQUAZIONI ELLITTICHE DEGENERI

G.Di Fazio – P.Zamboni

Equazioni lineari con ipotesi di tipo L^p sui coefficienti

$$-(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + b_i u_{x_i} + cu = f$$

- De Giorgi (1957);
- Stampacchia (1965);
- Ladyzhenskaia & Uraltzeva (1968);

  Estensione ad alcuni casi non lineari - sempre con assunzioni di tipo L^p.
- Serrin (1964);
- Morrey (1966);
- Trudinger (1967);

Emerge l'inadeguatezza delle classi L^p come classi dei coefficienti di ordine inferiore.

Equazioni lineari con assunzioni di tipo non L^p sui coefficienti di ordine inferiore.

- Lewy & Stampacchia (1970); hölderianità per l'equazione

$$-\Delta u = f$$

  con f in uno spazio di Morrey legato alla dimensione dello spazio ambiente.

- Aizenman & Simon (1982); - Harnack con V nella classe di Stummel – Kato per l'equazione

$$-\Delta u = Vu$$

La tecnica fa uso di metodi probabilistici e di un conveniente teorema di immersione.

Definizione 1 *Supponiamo che*

$$\eta(R) \equiv \sup_{x\in\Omega} \int_{\Omega\cap B_R(x)} \frac{|V(y)|}{|x-y|^{n-2}}\, dy \to 0\,, \textit{quando } R \to 0\,.$$

Diciamo allora che la funzione V appartiene alla classe di Stummel–Kato class, $S(\Omega)$.

Teorema 1 (Aizenman & Simon, Schechter) *Se $V \in S(\Omega)$,*

$$\int_{B_R} |V|\, u^2\, dx \leq c\, \eta(R) \int_{B_R} |\nabla u|^2\, dx\,, \qquad \forall u \in C_0^\infty(B_R)\,,$$

- Dal Maso & Mosco (1986); $Lu + \mu u = \nu$, con L uniformemente ellittico e μ,ν misure verificanti condizioni di tipo Stummel - Kato;
- Chiarenza – Fabes – Garofalo (1986); $Lu - Vu = 0$ L uniformemente ellittico e $V \in S(\Omega)$; uso della formula di rappresentazione.
- Simader (1990); $-\Delta u + Vu = 0$, quando la soluzione è limitata, Harnack e la continuità sono fatti equivalenti.
- Hinz & Kalf (1990); $Lu = Vu$, disuguaglianza di Harnack e regolarità attraverso studio di sottosoluzioni e soprasoluzioni.
- D. (1992); $Lu = f$, L uniformemente ellittico, uso della formula di rappresentazione e assunzioni di tipo Stummel e Morrey;
- Rakotoson & Ziemer (1990); equazione quasilineare, regolarità attraverso la disuguaglianza di Harnack.
- Zamboni (1995 - 2002); equazione quasilineare, regolarità attraverso la disuguaglianza di Harnack mediante una tecnica dovuta a Serrin.

- Gutierrez (1994); $Lu = Vu$, equazione lineare che degenera secondo un peso A_2 e V in una classe tipo Stummel.
- Vitanza & Zamboni (1997); Risultati collegati a quello di Gutierrez nel caso degenere.
- Citti - Garofalo - Lanconelli (1994); $Lu = Vu$, equazione lineare del tipo somme di quadrati. Risultato di continuità con V in Stummel.
- Citti & D. (1994);$Lu = Vu$, equazione lineare del tipo somme di quadrati. Risultato di hölderianità per operatori del tipo somma di quadrati con V in una classe di Morrey costruita sulle linee di livello della soluzione fondamentale.
- Capogna - Danielli - Garofalo; (1993) Harnack e regolarità per equazioni quasi lineari degeneri;
- Lu; (1994) Harnack e regolarità per equazioni lineari degeneri;
- Biroli & Mosco (1999); Forme di Dirichlet.

- D. & Zamboni; Degenerazione secondo pesi di tipo strong A_∞ - equazione quasilineare;
- D.- Lanconelli - Gutierrez; Degenerazione per campi vettoriali non regolari - equazione lineare.

Si rivela cruciale la validità del teorema 1 per quanto concerne la regolarità con termini di ordine inferiore.

- Aizenman & Simon (1982), Schechter (1984) $p = 2$ e $V \in S$
- C.Fefferman (1983) per $p = 2$ e $V \in L^{r,n-pr}$.
- Chiarenza & Frasca; (1990) $1 < p \leq n/2$ e $V \in L^{r,n-pr}$ - prova più semplice.
- Danielli (1999); Generalizza Chiarenza-Frasca ai campi di Hörmander.
- D. & Zamboni (2002); $p > 1$ e V in una classe tipo Stummel – Kato rispetto a campi vettoriali.

$X = (X_1, \ldots, X_m)$ campi vettoriali su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ a coefficienti localmente Lipschitziani b_{jk}.

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad b_{jk} \in Lip_{loc}(\Omega) \quad j = 1, \ldots, m, \;\; k = 1, \ldots, n,$$

$X_j^* = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(b_{jk} \,\cdot\,)$. Si definiscono gli spazi di Sobolev rispetto ai campi,

$$W_X^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;:\; X_j u \in L^p(\Omega),\; j = 1, \ldots, m \right\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

normati nel modo naturale,

$$\|u\|_{1,p} \equiv \|u\|_p + \|\,|Xu|\,\|_p \,.$$

Usando i campi, si può considerare una metrica - la metrica di controllo. Una curva $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 a tratti verificante la condizione

$$\langle \gamma'(t), \xi \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \langle X_j(\gamma(t)), \xi \rangle^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

si dice X- sub unitaria. Posto $l_S(\gamma) = T$, l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve X-sub unitarie che congiungono due dati punti (se ne esistono!) si chiama distanza di Carnot – Caratheodory rispetto al sistema di campi X.

(A1) L'applicazione identica $i : (\mathbb{R}^n, d_e) \to (\mathbb{R}^n, d)$ è continua;

(A2) (Doubling condition for small balls) Per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ esistono costanti C_D, $R_D > 0$ tali che, se $x_0 \in \Omega$ e $0 < 2r < R_D$ si ha

$$|B(x_0, 2r)| \leq C_D |B(x_0, r)|;$$

(A3) (Weak-L^1 Poincarè) Fissato Ω esistono due costanti positive C_P e $\alpha \geq 1$ tali che, per ogni $x_0 \in \Omega$, $0 < r < R_D$ e $u \in C^1(B(x_0, \alpha r))$, si ha:

$$\sup_{\lambda>0}[\lambda|\{x \in B(x_0, r) \ : \ |u(x) - u_{B(x_0,r)}| > \lambda\}|] \leq C_P R \int_{B(x_0,\alpha r)} |Xu| dx\,.$$

$Q = \log_2 C_D$, si chiama dimensione omogenea di Ω.

Definizione 2 (classi di Stummel – Kato) *Siano* $V \in L^1_{loc}(\Omega)$*,* $r > 0$ *and* $1 < p < Q$*. Posto*

$$\phi_V(r) \equiv \sup_{x\in\Omega}\left(\int_{\Omega\cap B(x,r)} \frac{d(x,y)}{|B(x,d(x,y))|}\left(\int_{\Omega\cap B(x,r)} |V(z)|\frac{d(z,y)}{|B(z,d(z,y))|}dz\right)^{\frac{1}{p-1}} dy\right)^{p-1}.$$

diciamo che una funzione $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ *appartiene alla classe* $(\tilde{M}_X)_p(\Omega)$ *quando* $\phi_V(r)$ *è finita per ogni* $r > 0$*. Se inoltre si ha:* $\lim_{r\to 0+} \phi_V(r) = 0$ *diciamo che la funzione appartiene alla classe* $(M_X)_p(\Omega)$*. La funzione* V *appartiene invece alla classe* $(M_X)'_p(\Omega)$ *quando*

$$\exists\, \delta > 0 \quad : \quad \int_0^\delta \frac{\phi_V(t)^{\frac{1}{p}}}{t}\, dt < +\infty\,.$$

Definizione 3 (Spazi di Morrey) *Siano* $p \in [1, +\infty[$ *e* $\lambda > 0$. *Diciamo che* $V \in L^p_{loc}(\Omega)$ *appartiene allo spazio di Morrey rispetto al sistema di campi* $X = (X_1, \ldots, X_m)$, $L_X^{p,\lambda}(\Omega)$, *se*

$$\|V\|_{L_X^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0<r<d_0}} \left(\frac{r^\lambda}{|B(x,r) \cap \Omega|} \int_{B(x,r)\cap\Omega} |V(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

$d_0 = \min(\mathrm{diam}(\Omega), R_D)$.

Proposizione 1 *Sia* $1 < p < Q$ *e* $0 < \varepsilon < p$. *Se* $V \in L_X^{1,p-\varepsilon}(\Omega)$ *si ha:*
$\phi_V(r) \leq C\,(C_D, p, \varepsilon)\ \|V\|_{L_X^{1,p-\varepsilon}} r^\varepsilon, \quad 0 < r < R_D$ *ovvero*

$$L_X^{1,p-\varepsilon}(\Omega) \subseteq (M_X)'_p(\Omega).$$

Teorema 2 (D.& Zamboni - PAMS 2002) *Sia* Ω *un aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$*, di dimensione* Q *e sia* $1 < p < Q$*. Supponiamo (A1) - (A3) e* $V \in (M_X)_p(\Omega)$*. Allora esiste una costante positiva* c *indipendente da* u *tale che*

$$\int_\Omega |V(x)|\,|u(x)|^p\,dx \leq c\,\phi_V(2r) \int_\Omega |Xu(x)|^p\,dx$$

per ogni funzione u *regolare a supporto compatto in* $B_r \subset B_{2r} \subset \Omega$.

$$\int_B |V(x)|\,|u(x)|^p\,dx \le c\int_B |V(x)|\,|u(x)|^{p-1}\left(\int_B |Xu(y)|\frac{d(x,y)}{|B(x,d(x,y))|}\,dy\right)dx$$

$$\le c\int_B |Xu(y)|\left(\int_B |V(x)|\,|u(x)|^{p-1}\frac{d(x,y)}{|B(x,d(x,y))|}\,dx\right)dy$$

$$\le c\left(\int_B |Xu(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_B\left(\int_B |V(x)|\,|u(x)|^{p-1}\frac{d(x,y)}{|B(x,d(x,y))|}\,dx\right)^{\frac{p}{p-1}}dy\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

$$\int_B \left(\int_B |V(x)|\,|u(x)|^{p-1} \frac{d(x,y)}{|B(x,d(x,y))|}\,dx \right)^{\frac{p}{p-1}} \,dy$$

$$\leq \int_B \left(\int_B |V(z)| \frac{d(z,y)}{|B(z,d(z,y))|}\,dz \right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot \left(\int_B |V(x)|\,|u(x)|^p \frac{d(x,y)}{|B(x,d(x,y))|}\,dx \right) dy =$$

$$= \int_B |V(x)|\,|u(x)|^p \int_B \frac{d(x,y)}{|B(x,d(x,y))|} \cdot \left(\int_B |V(z)| \frac{d(z,y)}{|B(z,d(z,y))|}\,dz \right)^{\frac{1}{p-1}} \,dy\,dx$$

$$\leq \phi^{\frac{1}{p-1}}(2r) \int_B |V(x)|\,|u(x)|^p\,dx\,.$$

Corollario 2 *Sotto le stesse ipotesi del teorema precedente si ha che per ogni* $\sigma > 0$ *esiste una funzione positiva* $K(\sigma) \sim \frac{\sigma}{\left[\phi_V^{-1}(\sigma)\right]^{Q+p}}$ *tale che*

$$\int_\Omega |V(x)|\,|u(x)|^p\,dx \le \sigma \int_\Omega |Xu(x)|^p\,dx + K(\sigma) \int_\Omega |u(x)|^p\,dx\,,$$

per ogni funzione u regolare a supporto compatto in Ω.

Sia Ω un aperto limitato di dimensione Q. Consideriamo

$$A(x,u,\xi) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m\,,\ \ B(x,u,\xi) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

tali che

$$\begin{cases} |A(x,u,\xi)| & \leq a|\xi|^{p-1} + b|u|^{p-1} + e \\ |B(x,u,\xi)| & \leq c|\xi|^{p-1} + d|u|^{p-1} + f \\ \xi \cdot A(x,u,\xi) & \geq |\xi|^p - d|u|^p - g \end{cases} \tag{1}$$

q.o. $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ e l'equazione

$$\sum_{j=1}^{m} X_j^* A_j(x,u(x),Xu(x)) + B(x,u(x),Xu(x)) = 0\,. \tag{2}$$

Definizione 4 *Una funzione* $u \in W^{1,p}_{X,loc}(\Omega)$ *si dice soluzione debole dell'equazione (2) in* Ω *se*

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega} A_j(x, u(x), Xu(x)) X_j \, \varphi(x) \, dx + \int_{\Omega} B(x, u(x), Xu(x)) \, \varphi(x) \, dx = 0 \, ,$$

per ogni $\varphi \in W^{1,p}_{X,0}(\Omega)$.

Teorema 3 (Locale limitatezza) *Supponiamo (A1)-(A3). Sia* Ω *un aperto limitato di dimensione Q e sia* $u \in W^{1,p}_{X,loc}(\Omega)$, $1 < p < Q$, *una soluzione debole dell'equazione (2). Assumiamo verificate le condizioni di struttura (1) ed inoltre,*

$$a \in \mathbb{R}\,,\; b^{p/p-1}\,, c^p\,,\; d\,,\; e^{p/p-1}\,,\; f\,, g\,, \in (M_X)'_p(\Omega)\,.$$

Allora, esiste una costante positiva c, indipendente da u, tale che, per ogni $B_r = B(x_0, r) \subset B(x_0, 4r) \subset \Omega$ *e* $r < R_D$, *si ha*

$$\|u\|_{L^\infty(B_r)} \leq C \left\{ \left(\fint_{B_{2r}} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + h(r) \right\}$$

dove

$$h(r) = \left[\phi_{e^{\frac{p}{p-1}}}(2r) + \phi_g(2r) \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\phi_f(2r) \right]^{\frac{1}{p-1}} \;.$$

Traccia della dimostrazione

Posto $v = |u| + h(r)$, dalle ipotesi di struttura, si ottiene

$$\begin{cases} |A(x,u,\xi)| \le \; a|\xi|^{p-1} + b_1|v|^{p-1} \\ |B(x,u,\xi)| \le \; c|\xi|^{p-1} + d_1|v|^{p-1} \\ \xi \cdot A(x,u,\xi) \ge \; |\xi|^p - d_1|v|^p \end{cases} \tag{3}$$

dove,

$$b_1 = b + h^{1-p}e \quad , \quad d_1 = d + h^{1-p} f + h^{-p} g \tag{4}$$

sono funzioni della classe di Stummel. Infatti,

$$\phi_{b_1^{\frac{p}{p-1}}}(\rho) \le C(p)\left[\phi_{b^{\frac{p}{p-1}}}(\rho) + 1\right]$$

$$\phi_{d_1}(\rho) \le C(p)\left[\phi_d(\rho) + 2\right], \; 0 < \rho < 2r\,.$$

Seguendo la classica tecnica di Serrin, per una conveniente potenza w della soluzione u, si trova

$$\int_{B_{2r}} \eta^p |Xw|^p \, dx \leq C(p,a) q^{p-1} \left\{ \int_{B_{2r}} |w(X\eta)|^p \, dx + \int_{B_{2r}} V |\eta w|^p \, dx \right\},$$

dove

$$V = b_1^{\frac{p}{p-1}} + c^p + d_1 \, .$$

Usando adesso il fatto che la funzione V appartiene alla classe di Stummel–Kato,

$$\int_{B_{2r}} \eta^p |Xw|^p \, dx \leq C q^{p-1} \Big\{ (1+\sigma) \int_{B_{2r}} |w(X\eta)|^p \, dx + \\ + \sigma \int_{B_{2r}} \eta^p |Xw|^p \, dx + K(\sigma) \int_{B_{2r}} \eta^p w^p \, dx \Big\} \quad \forall \sigma > 0 \,,$$

dove

$$K(\sigma) \sim \frac{\sigma}{\left[\phi_V^{-1}(\sigma)\right]^{Q+p}} \,.$$

Ciò permette un riporto a primo membro scegliendo in modo adeguato σ. Precisamente, scegliamo $\sigma = \dfrac{1}{2Cq^{p-1}}$ da cui,

$$\int_{B_{2r}} \eta^p |Xw|^p \, dx \leq C \left\{ q^{p-1} \int_{B_{2r}} |X\eta|^p w^p \, dx + q^{p-1} K \left(\frac{1}{2Cq^{p-1}} \right) \int_{B_{2r}} \eta^p w^p \, dx \right\}$$

Dal teorema di Sobolev segue,

$$\left(\int_{B_{2r}} |\eta w|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \le C\frac{r^p}{|B_r|^{\frac{p}{Q}}}\left\{q^{p-1}\int_{B_{2r}} |X\eta|^p w^p\,dx\right.$$
$$\left.+q^{p-1}K\left(\frac{1}{2Cq^{p-1}}\right)\int_{B_{2r}} \eta^p w^p\,dx\right\},$$

dove $p^* = \frac{pQ}{Q-p}$ e C è indipendente da w, ovvero

$$\left(\int_{B_{r_1}} w^{p\chi}\,dx\right)^{\frac{1}{\chi}} \le C\frac{r^p}{|B_r|^{\frac{p}{Q}}}\frac{1}{(r_2-r_1)^p}\frac{1}{\left[\phi_V^{-1}\left(\frac{1}{Cq^{p-1}}\right)\right]^{Q+p}}\int_{B_{r_2}} w^p\,dx\,,$$

dove $\chi = \frac{p*}{p} = \frac{Q}{Q-p}$.

Ponendo $\gamma = pq$,

$$\|v\|_{L^{\chi\gamma}(B_{r_1})} \leq C^{\frac{1}{\gamma}} \frac{r^{\frac{p}{\gamma}}}{|B_r|^{\frac{p}{\gamma Q}}} \left(\frac{1}{r_2 - r_1}\right)^{\frac{p}{\gamma}} \left[\frac{1}{\left(\phi_V^{-1}\left(\frac{1}{C\left(\frac{\gamma}{p}\right)^{p-1}}\right)\right)^{Q+p}}\right]^{\frac{1}{\gamma}} \|v\|_{L^{\gamma}(B_{r_2})}.$$

Iterando quest'ultima disuguaglianza,

$$\|v\|_{L^{\infty}(B_r)} \leq C|B_r|^{-\frac{1}{p}} \prod_{j=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{\left(\phi_V^{-1}\left(\frac{1}{C\chi^{(p-1)j}}\right)\right)^{Q+p}}\right]^{\frac{1}{p\chi^j}} \|v\|_{L^p(B_{2r})} .$$

Il risultato sarà conseguito se e solo se si ha convergenza del seguente prodotto infinito,

$$\prod_{j=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{\left(\phi_V^{-1}\left(\frac{1}{C\chi^{(p-1)j}}\right)\right)^{Q+p}}\right]^{\frac{1}{p\chi^j}} < +\infty$$

ovvero convergenza della serie numerica,

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{\chi^j}\log\,\phi_V^{-1}\left(\frac{1}{\chi^{(p-1)j}}\right)$$

e ciò si ottiene facilmente grazie all'ipotesi sulla funzione ϕ.

Teorema 4 (Disuguaglianza di Harnack) *Assumiamo (A1)-(A3). Sia* Ω *è un aperto limitato di dimensione Q e* $u \in W^{1,p}_{X,loc}(\Omega)$, *with* $1 < p < Q$, *una soluzione debole non negativa dell'equazione (2). Supponiamo inoltre che valgano le condizioni di struttura (1) nelle quali si assume,*

$$a \in \mathbb{R}\,,\ b^{p/p-1}\,, c^{p}\,,\ d\,,\ e^{p/p-1}\,,\ f\,, g\,, \in (M_X)'_p(\Omega)\,.$$

Allora, esiste una costante positiva c, indipendente da u, tale che, per ogni $B_r = B(x_0, r)$ *per cui* $B(x_0, 4r) \subset \Omega$ *e* $r < R_D$, *abbiamo*

$$\max_{B_r} u \le c\left\{\min_{B_r} u + h(r)\right\}\ .$$

Osservazione 1 *La disuguaglianza di Harnack rimane valida anche per le sottosoluzioni non negative e la dimostrazione è la stessa.*

Osservazione 2 *Le soluzioni deboli sono, a questo punto, continue rispetto alla distanza indotta dalla metrica di Carnot – Caratheodory.*

Teorema 5 (Continuità delle soluzioni deboli) *Supponiamo vere le (A1)-(A3). Sia* Ω *un aperto limitato di dimensione* Q *e sia* $u \in W^{1,p}_{X,loc}(\Omega)$, $1 < p < Q$, *una soluzione debole dell'equazione (2). Supponiamo vere le condizioni di struttura (1) nelle quali supponiamo,*

$$a \in \mathbb{R}\,,\ b^{p/p-1}\,, c^p\,,\ d\,,\ e^{p/p-1}\,,\ f\,, g\,, \in (M_X)'_p(\Omega)\,.$$

Allora, u è continua in Ω.

Teorema 6 (Hölderianità delle soluzioni deboli)
Supponiamo vere le (A1)-(A3). Sia Ω *un aperto limitato di dimensione Q. Sia* $u \in W_X^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < Q$, *una soluzione debole dell'equazione (2). Supponiamo vere le condizioni di struttura (1) nelle quali*

$$a \in \mathbb{R}\,,\; b^{p/p-1}\,, c^p\,,\; d\,,\; e^{p/p-1}\,,\; f\,, g\,,\; \in L_X^{1,p-\epsilon}(\Omega)\,.$$

Allora, la soluzione u è localmente hölderiana in Ω *rispetto alla metrica di Carnot–Caratheodory ovvero, per ogni* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *esistono* $c > 0$ *e* $\alpha > 0$, *tali che*

$$|u(x) - u(y)| \le c\, d(x,y)^{\alpha} \quad \forall x, y \in \Omega'\,.$$