

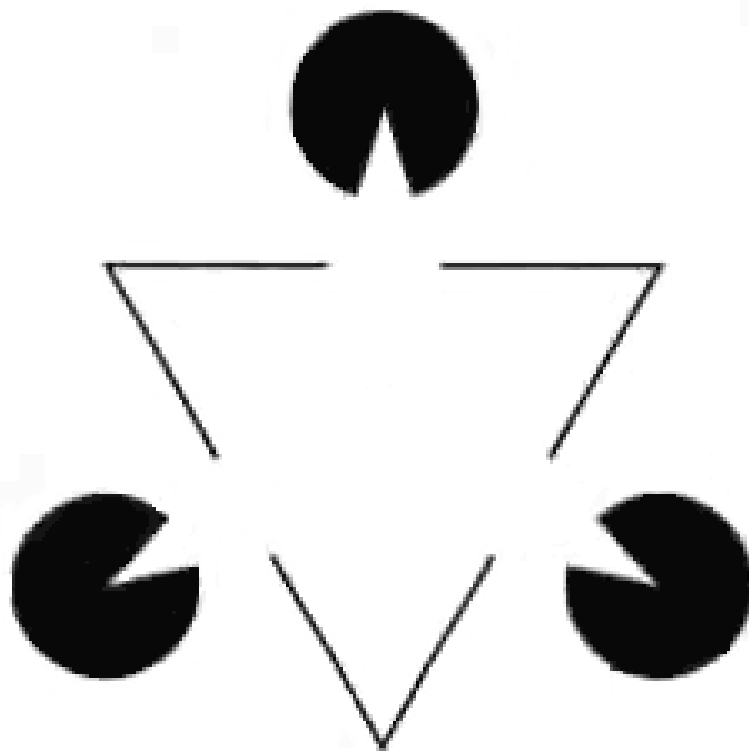
La struttura sub-riemanniana della corteccia visiva

G. Citti - A. Sarti

<http://www.vision.unibo.it>

Milano, luglio 2004

Completamento
modale e amodale



Modelli Fenomenologici

MUMFORD, NITZBERG, SHIOTA; AMBROSIO,
MASNOU; MOREL; BERTALMIO; BELLETTINI;

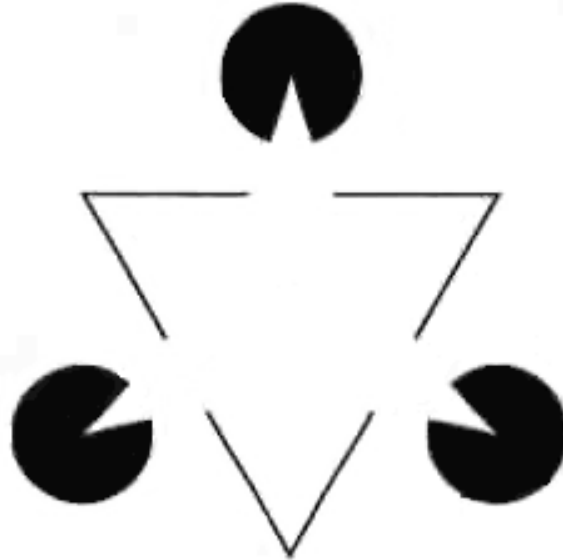
Modelli Neurofisiologici

GROSSBERG, MINGOLLA; JULESZ;
FIELD, HEYES, HESS; SINGER; GREY ; LEE

Modelli basati sui due approcci

PETITOT, TONDUT

Elastiche



$\tilde{\gamma} = (x, y)$ curva regolare

$$\int_{\tilde{\gamma}} 1 + k^2, \quad k = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Mumford, Nitzberg, Shiota;

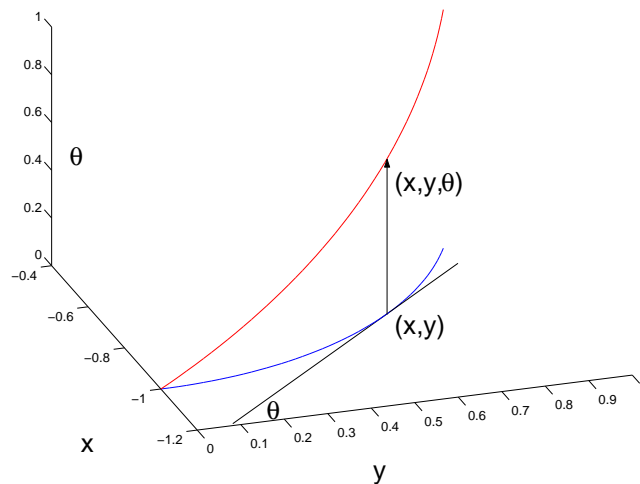
De Giorgi; Bellettini, Paolini: approssimazione
nel senso della Γ convergenza.

Modifiche del funzionale:

$$\int_{\gamma} 1 + \alpha\phi(k),$$

Se ϕ cresce linearmente, i minimi possono
essere continui, o avere spigoli.

Lifting di curve: Petitot - Tondut



$$\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$$

$$x' = \cos(\theta), \quad y' = \sin(\theta)$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$$

$$\theta'(t) = k$$

$$length(\gamma) = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + \theta'^2} = \int \sqrt{1 + k^2}$$

Le elastiche sono proiezioni 2D di minimi vincolati in 3D.

L'algebra di rototraslazione

lifting e geometria subriemanniana [C. Sarti]:

$$\gamma'(t) = (\cos(\theta), \sin(\theta), k) = X_1 + kX_2$$

dove

$$X_1 = \cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y, \quad X_2 = \partial_\theta$$

$$X_3 = [X_2, X_1] = -\sin(\theta)\partial_x + \cos(\theta)\partial_y$$

Vale la proprieta' di connettivita'

$$d((x, y, \theta), (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta})) = \inf\{\text{length}(\gamma) :$$

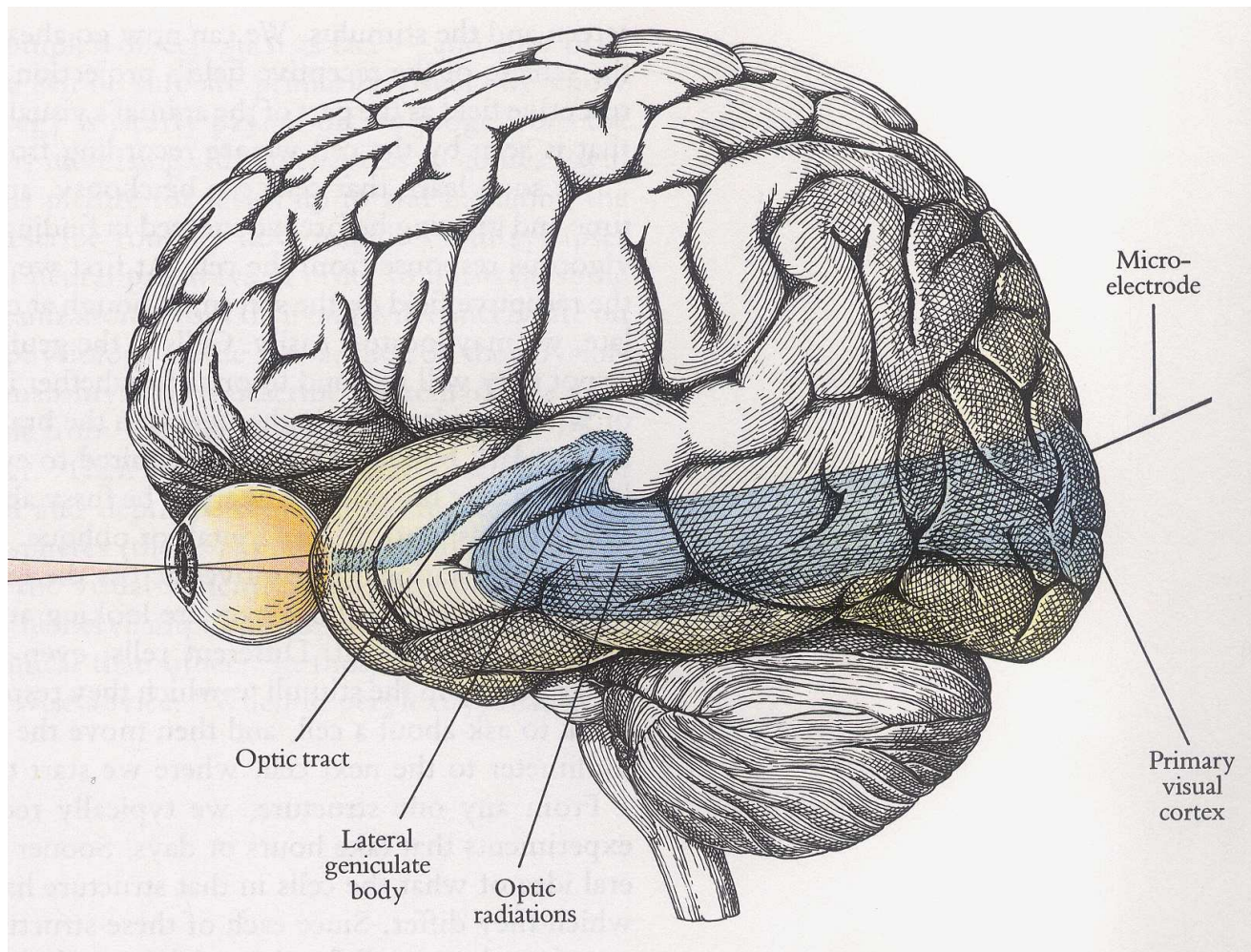
$$\gamma(0) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}), \gamma(T) = (x, y, \theta)\}$$

$$\gamma'(t) = (\gamma_1\vec{X}_1 + \gamma_2\vec{X}_2)$$

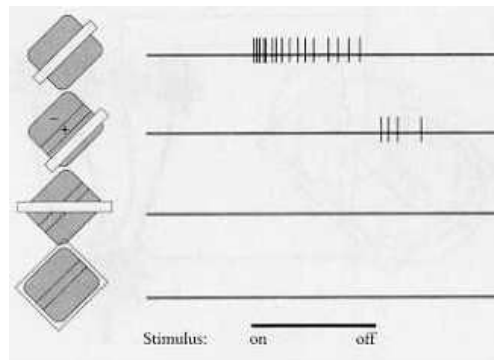
[Nagel, Stein, Wainger]

Le proiezioni 2D delle geodetiche del gruppo sono elastiche

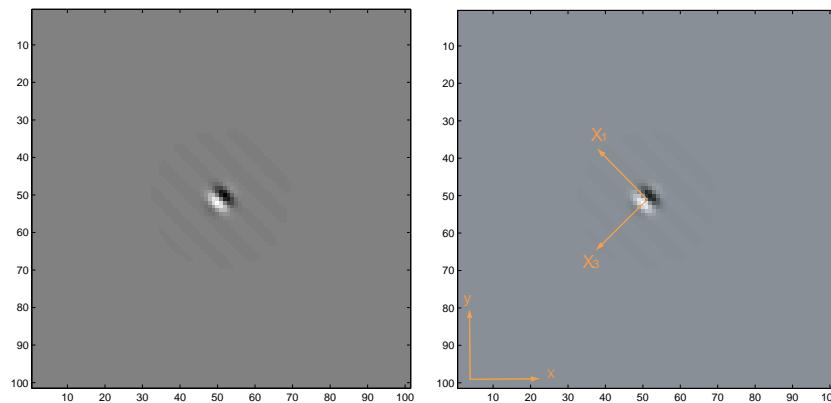
The Visual Path



Profili recettori delle cellule semplici

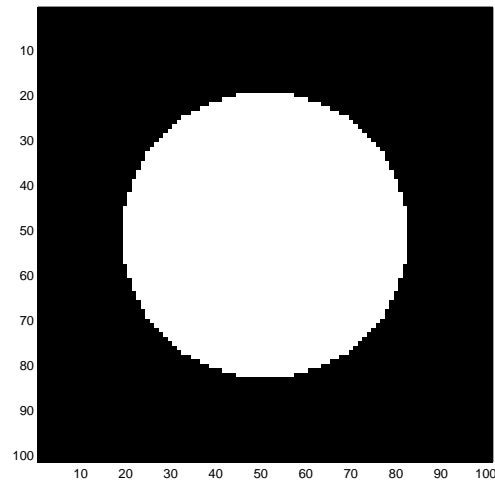


filtri sensibili all'orientazione, a media nulla, e a supporto compatto.

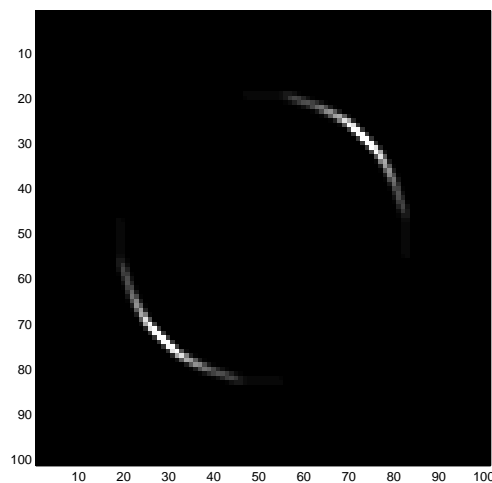
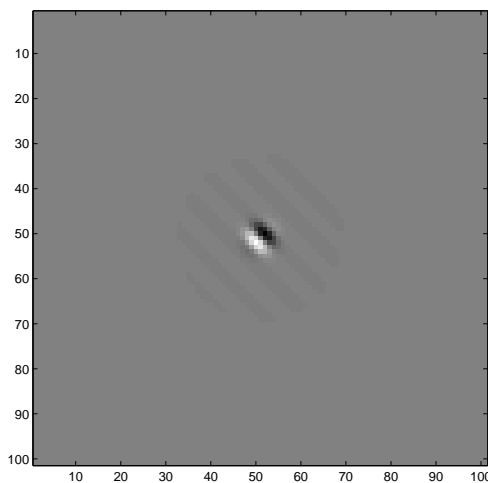


$$G_{(x,y,\theta)}(\xi, \eta) = X_3(\theta) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{s}}}{s}$$
$$X_3(\theta) = -\sin \theta \partial_\xi + \cos \theta \partial_\eta$$

La risposta ad una immagine



$$I : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$$



$$O(x, y, \theta) = \int G_{(x,y,\theta)}(\xi, \eta) I(\xi, \eta) d\xi d\eta =$$

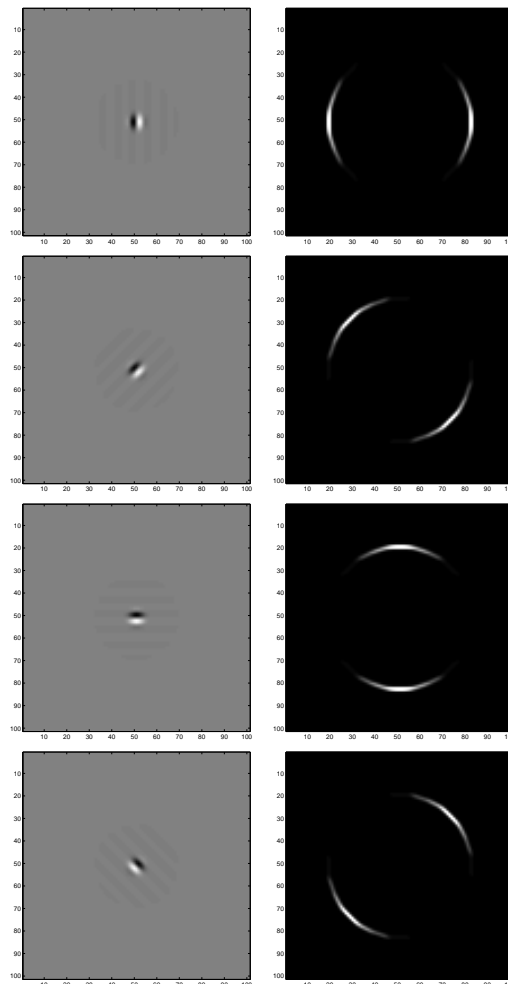
$$X_3(\theta) \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{s}}}{s} \star I = X_3(\theta) I_s$$

Le fibre di cellule semplici

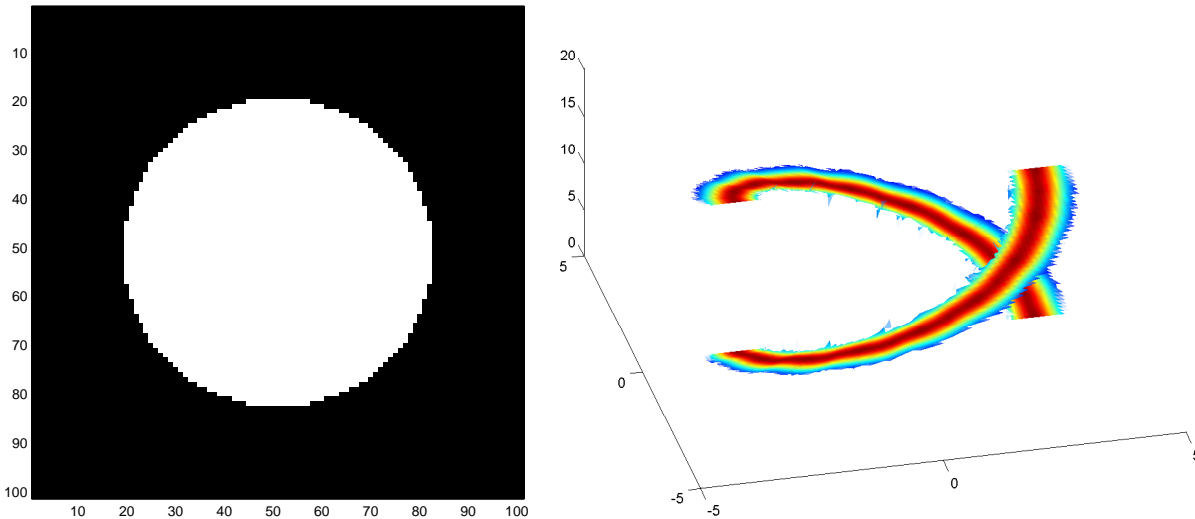
Sopra ogni punto c'è una intera fibra di cellule semplici: The visual cortex is a contact bundle

[Hoffman]

$$F(x, y) = \{G(x, y, \theta), \theta \in [0, \pi]\}$$



La soppressione dei non massimali



$$O(x, y, \bar{\theta}) = \max_{\theta \in [0, \pi]} O(x, y, \theta)$$

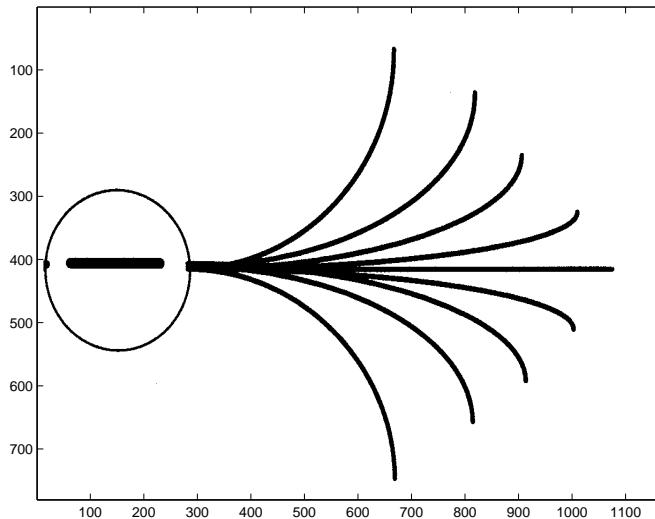
$$\Sigma = \{(x, y, \theta) : \partial_{\theta} O = 0, \partial_{\theta\theta} O(x, y, \theta) < 0\}$$

L'immagine e' liftata ad una superficie

$$\begin{aligned} \partial_{\theta} O &= \partial_{\theta}(X_3 I_s) = -X_1 I_s = \\ &= - \langle (\cos \theta, \sin \theta), \nabla I_s \rangle = 0 \end{aligned}$$

$(\cos \theta, \sin \theta)$ e' ortogonale al gradiente. Ogni curva di livello e' liftata come a pag 4.

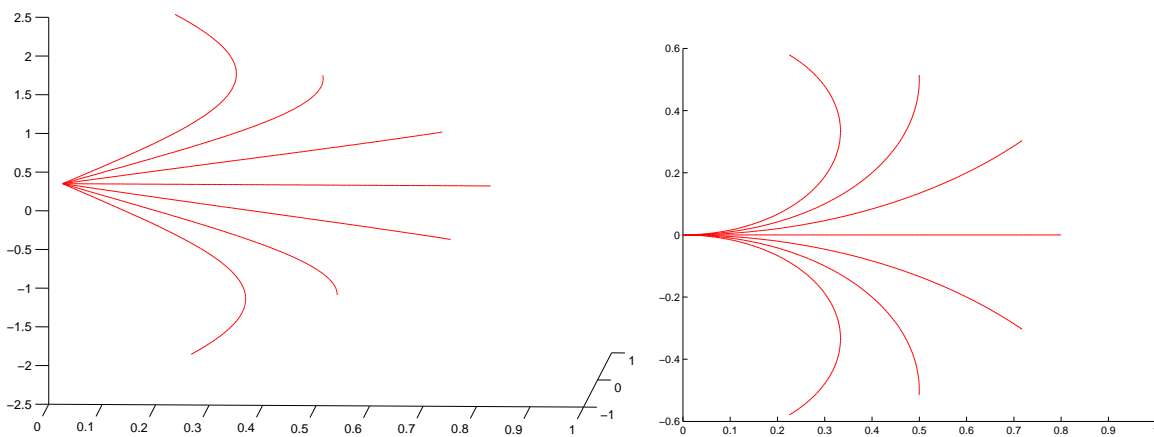
Campi di associazione e curve integrali



$$\gamma'(t) = (\gamma_1 \vec{X}_1 + \gamma_2 \vec{X}_2) \quad \gamma(0) = (x, y, \theta)$$

$$\vec{X}_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$$

$$\vec{X}_2 = (0, 0, 1)$$



Operatori differenziali

Gradiente orizzontale: $f \in C_X^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$\nabla_X u = (X_1 u, X_2 u) \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times S^1$$

$X_3 = [X_1, X_2]$. Se $u \in C_X^1$ non esiste $X_3 u$

Sezioni del tangente orizzontale $f \in C^1(\Omega, HX)$

$$\operatorname{div}_X(f_1, f_2) = X_1 f_1 + X_2 f_2$$

Sublaplaciano

$$\Delta_X u = X_1^2 u + X_2^2 u$$

Diffusione lungo le curve integrali dei campi

$$u_t = \Delta_X u$$

Bibliografia essenziale

distanza:

[Nagel, Stein, Weinger],

soluzione fondamentale - stime locali:

[Rothschild Stein] [Sanchez Calle]

stime gaussiane in gruppi omogenei:

[Bonfiglioli, Lanconelli, Uguzzoni]

Nonlinear equations

[Citti, Lanconelli, Montanari],

viscosity solutions [Stroffolini, Manfredi]

Teorema di Dini, rettificabilita'

in gruppi omogenei di passo 2

[B.Franchi, R.Serapioni, F.Serra Cassano]

[L.Ambrosio, B.Kirchheim]

Algebre nilpotenti e non

Ammettono una stratificazione

$$g = V_1 \oplus V_2,$$

$$V_1 = \text{span}\{X_1, X_2\}$$

$$V_2 = \text{span}\{X_3\} \quad \text{and}[V_1, V_2] = \{0\}.$$

Dilatazioni

$$\delta_\lambda(X_1) = \lambda X_1.$$

$$\delta_\lambda(X_3) = [\lambda X_{1j}, \lambda X_{1i}] = \lambda^2 X_3$$

$$X_1 = \cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y \quad X_2 = \partial_\theta$$

Non esistono dilatazioni. Se esistessero

$$X_1 = [X_3, X_2] = -[[X_1, X_2], X_2]$$

$$\delta_\lambda(X_1) = \lambda^3 X_1.$$

Riduzione al caso nilpotente

$$X_{1\bar{\xi}} = (\cos(\bar{\theta}) - (\theta - \bar{\theta}) \sin(\bar{\theta})) \partial_x + \\ + (\sin(\bar{\theta}) + (\theta - \bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \partial_y$$

$$X_{2\bar{\xi}} = \partial_\theta$$

$$X_{3\bar{\xi}} = -[X_{1\bar{\xi}}, X_{2\bar{\xi}}] = -\sin(\bar{\theta}) \partial_x + \cos(\bar{\theta}) \partial_y$$

Esiste un cambio di variabile $\Phi_{\bar{\xi}}$ e vettori

$$X_{1H} = \partial_{e_1} + e_2 \partial_{e_3} \quad X_{2H} = \partial_{e_2} - e_1 \partial_{e_3}$$

generatori dell'algebra di Heisenberg, tali che

$$(X_{i\bar{\xi}} u) \circ \Phi_{\bar{\xi}} = X_{iH}(u \circ \Phi_{\bar{\xi}})$$

dilatazioni approssimate

$$\Phi_{\bar{\xi}} \circ \delta_\lambda \circ \Phi_{\bar{\xi}}^{-1}$$

Parametriche della soluzione fondamentale

La soluzione fondamentale di

$$\partial_t = \Delta_{\bar{\xi}} = X_{1\bar{\xi}}^2 + X_{2\bar{\xi}}^2 \text{ e'}$$

$$\Gamma_{\bar{\xi}}(z, t; \zeta, \tau) = \Gamma_H(\Phi_{\bar{\theta}}(z), t; \Phi_{\bar{\theta}}(\zeta), \tau),$$

dove Γ_H , soluzione fondamentale dell'operatore del calore per Heisenberg e' nota esplicitamente.

Teorema *La soluzione fondamentale Γ di*

$\partial_t = \Delta_X$ soddisfa

$$|(\Gamma - \Gamma_{\bar{\xi}})(z, t; \zeta, \tau)| \leq (t - \tau)^{1/2} \Gamma_{\bar{\xi}}(z, t; \zeta, \tau)$$

per z, ζ in un intorno di $\bar{\xi}$. Inoltre

$$0 \leq \Gamma(z, t; \zeta, \tau) \leq \frac{C}{(t - \tau)^{Q/2}} \exp\left(-\frac{d^2(z, \zeta)}{t - \tau}\right)$$

dove $Q = 4$, per ogni $0 \leq t - \tau \leq T$, for every z, ζ .

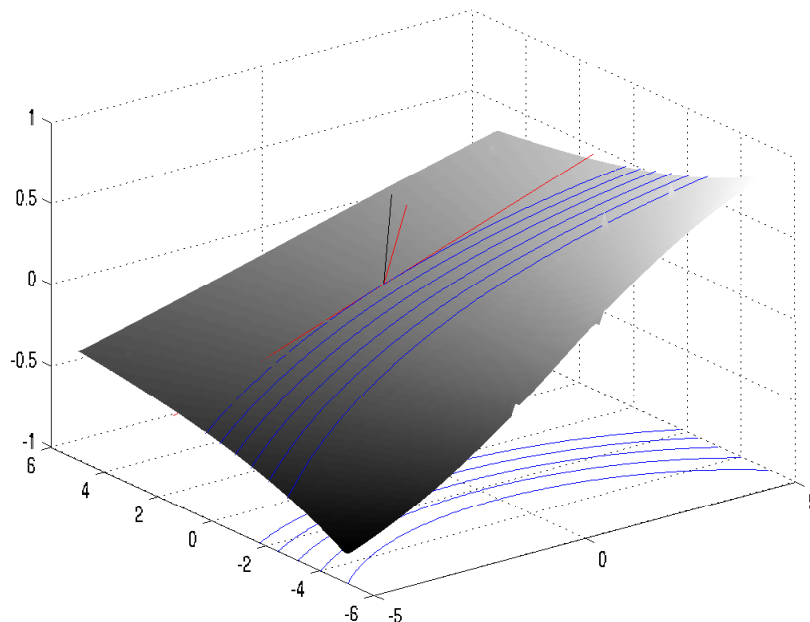
Superfici regolari in gruppi omogenei

$$\Sigma = \{(x, y, \theta) : v = 0, \nabla_X v \neq 0\}$$

vettore normale $\nabla_X v / |\nabla_X v|$

Teorema [Franchi Serapioni Serracassano] e' definita implicitamente una funzione continua θ . **Problema aperto: regolarita di θ**

Congettura: θ e' regolare lungo le proiezioni delle curve orizzontali che giacciono sulla superficie



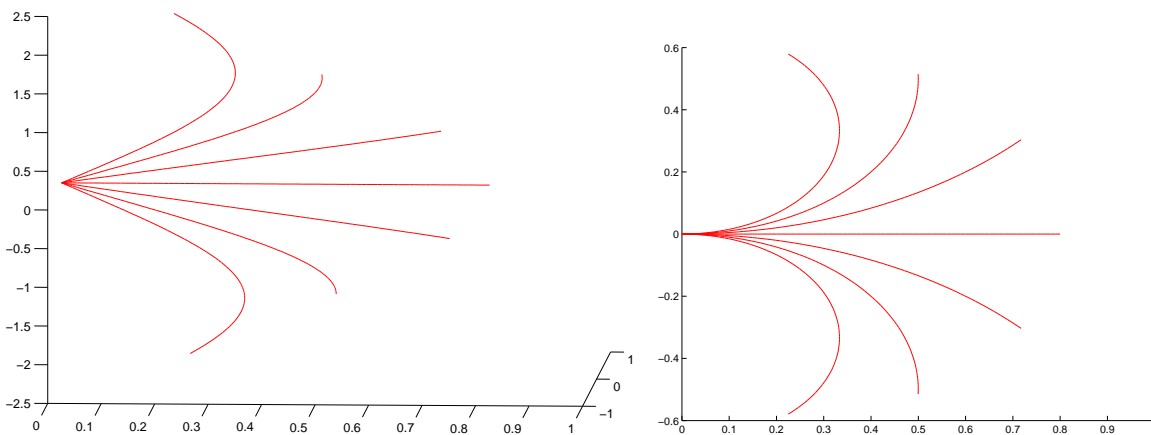
([Ambrosio Serracassano] nel caso omogeneo)

Teorema di Dini in gruppi non omogenei

Teorema [· - Manfredini] $v \in C^1_X(\Omega)$,

$$\Gamma = \{(x, y, \theta) \in \Omega : v(x, y, \theta) = 0, \partial_\theta v(x, y, \theta) > 0\}$$

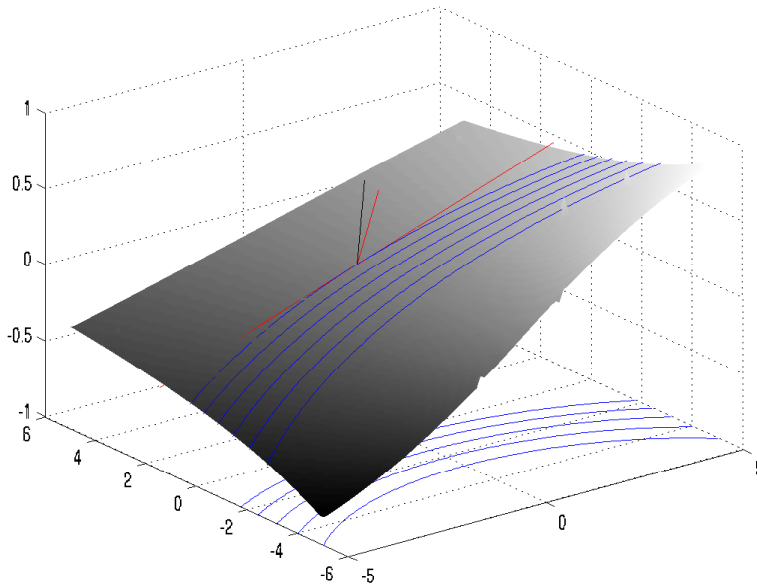
Allora esiste funzione implicita θ



Se γ e' curva integrale di $X_1 + kX_2$ di punto iniziale $(x, y, \theta(x, y))$ e $\tilde{\gamma}$ e' la proiezione su \mathbb{R}^2 , allora esiste

$$X_\theta(\theta(x, y)) = (\theta \circ \tilde{\gamma})'(0) = -\frac{X_1 f(x, y, \theta(x, y))}{X_2 f(x, y, \theta(x, y))}$$

Curvatura di una superficie regolare [C. Sarti]



$$\exists \tilde{\gamma} : \quad \tilde{\gamma}' = X_\theta(\tilde{\gamma})$$

$$X_\theta = \cos(\theta(x, y))\partial_x + \sin(\theta(x, y))\partial_y.$$

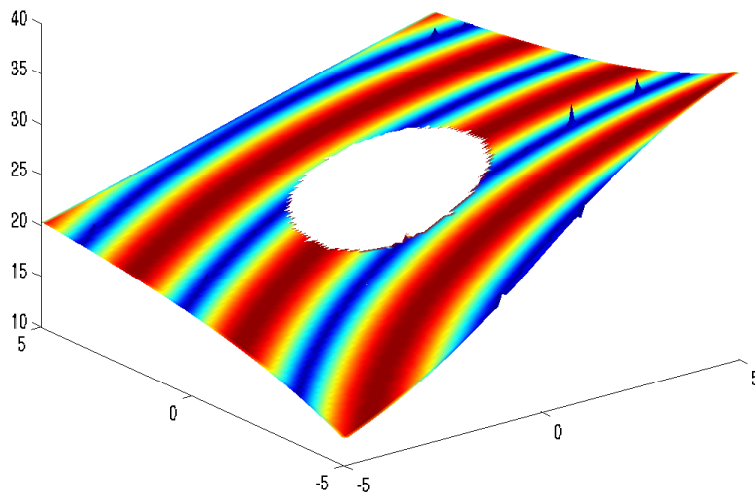
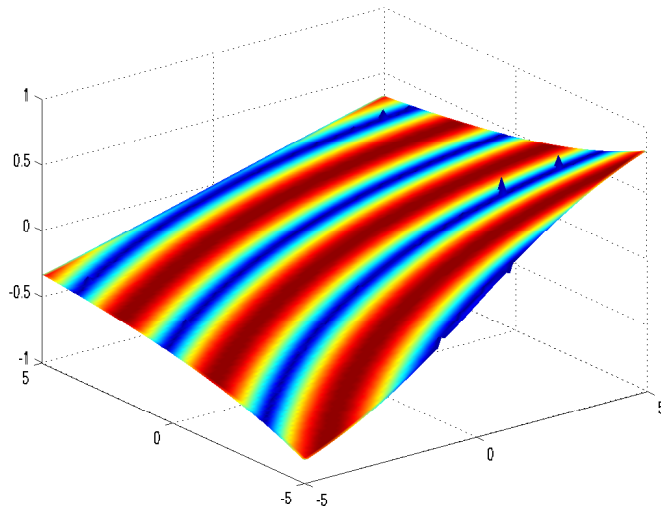
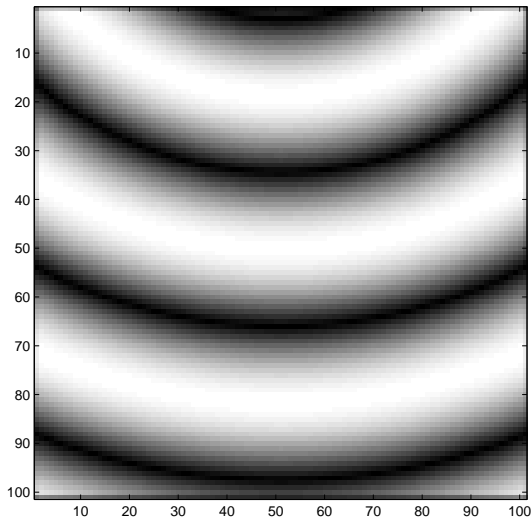
$$K_X(\gamma) = -\frac{\gamma_1''\gamma_2' - \gamma_2''\gamma_1'}{(\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2)^{3/2}}$$

$$K_X(\Sigma) = \operatorname{div}_X(\nu_X) = \left(\delta_{ij} - \frac{X_i v X_j v}{|D_X v|^2} \right) \frac{X_i X_j v}{|D_X v|}$$

Moto per curvatura:

$$v_t = \left(\delta_{ij} - \frac{X_i v X_j v}{|D_X v|^2} \right) X_i X_j v$$

Il modello di completamento [C. Sarti]



$$t = 0 \begin{cases} u_0 = O \\ \Sigma_0 = \{(x, y, \theta) : \partial_\theta u_0 = 0, \partial_{\theta\theta} u_0 < 0\} \end{cases}$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \delta_{\Sigma_0}$$

Il modello di completamento

1) diffusione lungo i campi

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_X u \text{ in } \mathbb{R}^2 \times S^1 \times [0, h] \\ u(\cdot, 0) = u_0 \delta_{\Sigma_0} \end{cases}$$

2) concentrazione che distrugge la diffusione normale e genera un moto per curvatura

$$\begin{cases} \Sigma_1(h) = \{\xi : \partial_{\nu_{\Sigma_0}} u(\xi, h) = 0, \partial_{\nu_{\Sigma_0}}^2 u < 0\} \\ u_1(h) : \Sigma_1(h) \rightarrow \mathbb{R} \quad u_1(h) = \sqrt{h} u(h) \end{cases}$$

Al tempo t , dopo n passi di lunghezza $h = t/n$ abbiamo due successioni $\Sigma_n(t), u_n(t)$.

$\Sigma_n(t)$ e' definita come level set.

$\Sigma_n(t) \rightarrow \Sigma(t)$ moto per curvatura di Σ_0

$u_n(t) \rightarrow u(t)$ evoluzione di u_0

Nel caso euclideo [Bence, Merriman, Osher]

[Evans]

Idea della prova

Nel gruppo è definita un'operazione di somma \oplus che commuta con le derivazioni

Teorema Sia $\xi_0 = 0 \in \Sigma_0$, ν_0 la normale a Σ in ξ_0 . Sia $s \in \mathbb{R}$ tale che

$$\xi_0 \oplus st\nu \in \Sigma_1$$

Allora

$$s = K_X(\xi_0) + o(1) \quad \text{as } t \rightarrow 0$$

dove $K_X(\xi_0)$ è la curvatura di Σ_0

In altre parole l'incremento 'infinitesimo' s in direzione normale è pari alla curvatura

Dim locally $\Sigma_1 = \{\theta = h(x, y) : (x, y) \in Q'\}$,

$$0 = X_2 u(\xi) = \int_{\Sigma} X_2 \Gamma(\zeta^{-1} \otimes \xi, t) u_0(\zeta) d\sigma(\zeta) =$$

usando la parametrice

$$= \int_{\Sigma \cap C} X_2 \Gamma_{\xi_0}(\zeta^{-1} \otimes \xi, t) u_0(\zeta) d\sigma(\zeta) + O(e^{-t})$$

se $\nu = X_2$, $\zeta = (x, y, \theta)$, $\xi = (0, 0, -st)$

$(\zeta^{-1} \otimes \xi) = (*, *, \theta - st)$, parametrizzando

$$= \int_{Q'} X_2 \Gamma_{\xi_0}(x, y, h(x, y) - st, t) \sqrt{1 + |\nabla h|^2} + O(e^{-t})$$

usando le dilatazioni approssimate $x = \sqrt{t}p$

$y = tq$,

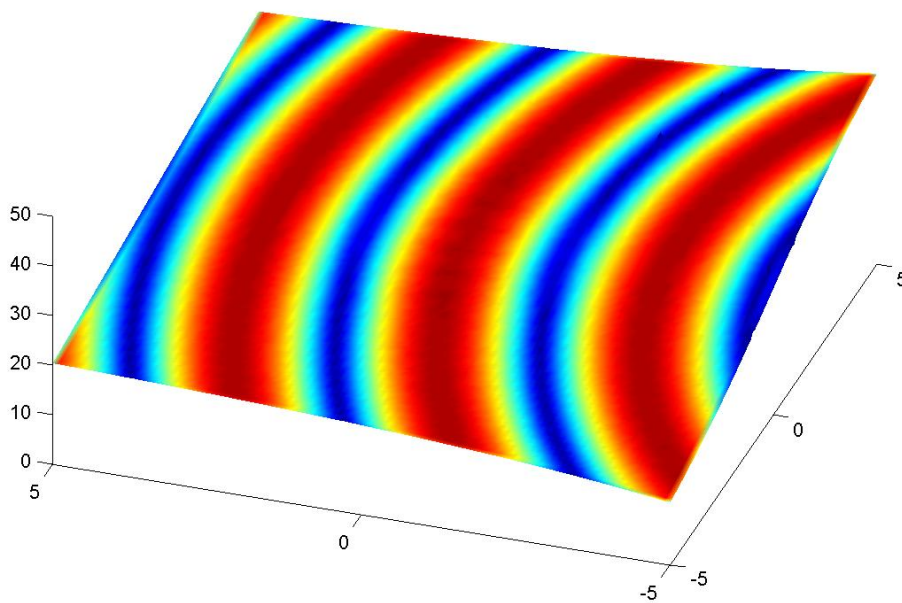
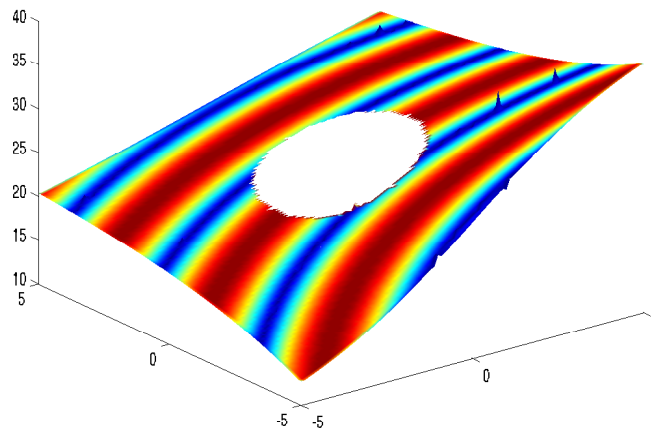
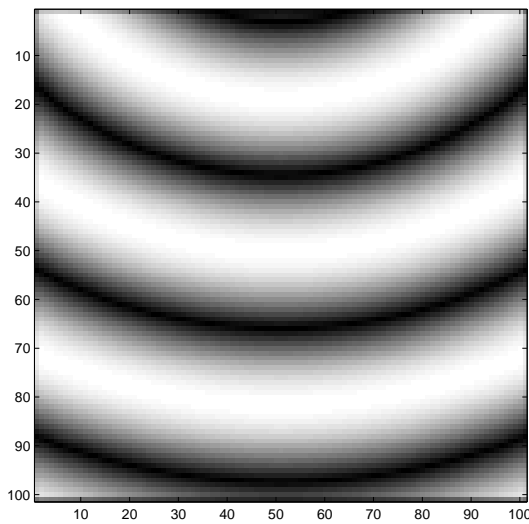
$$0 = \int_{R^2} X_2 \Gamma_{\xi_0}(tp, tq, h(\sqrt{t}p, tq) - st) \sqrt{1 + |\nabla h|^2} + O(e^{-t})$$

imponendo l'annullamento dello sviluppo di

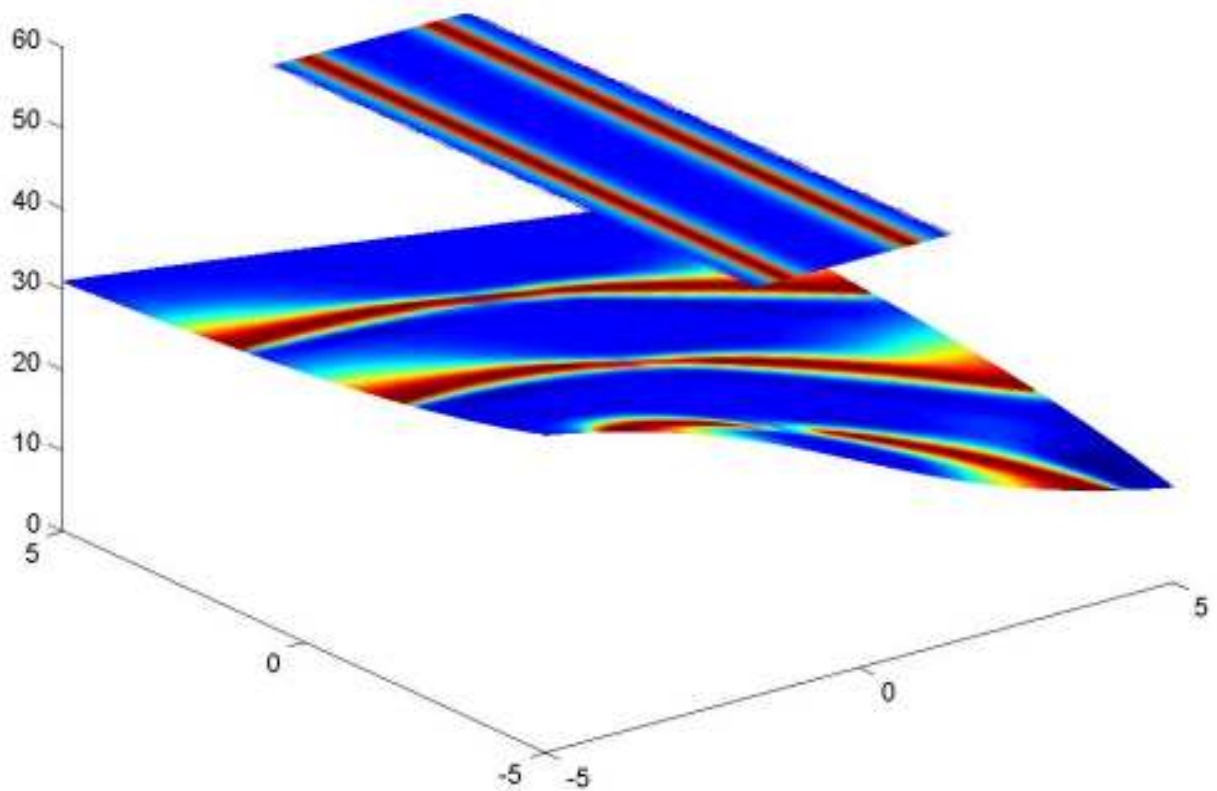
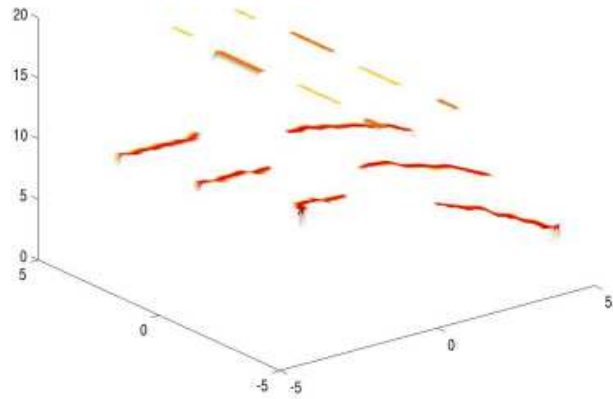
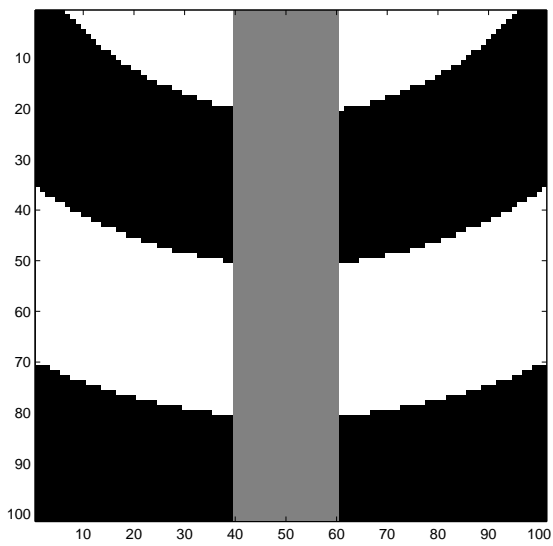
Taylor

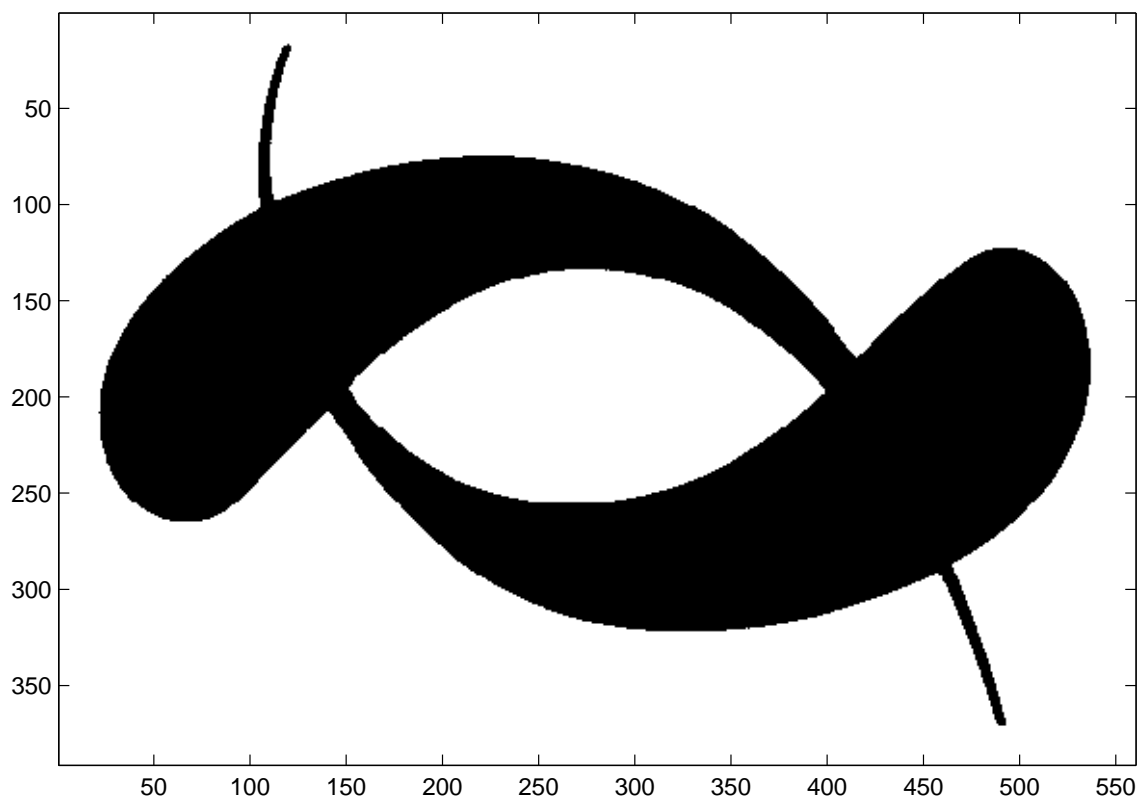
$$s = K(0) + O(\sqrt{t})$$

Macula cieca

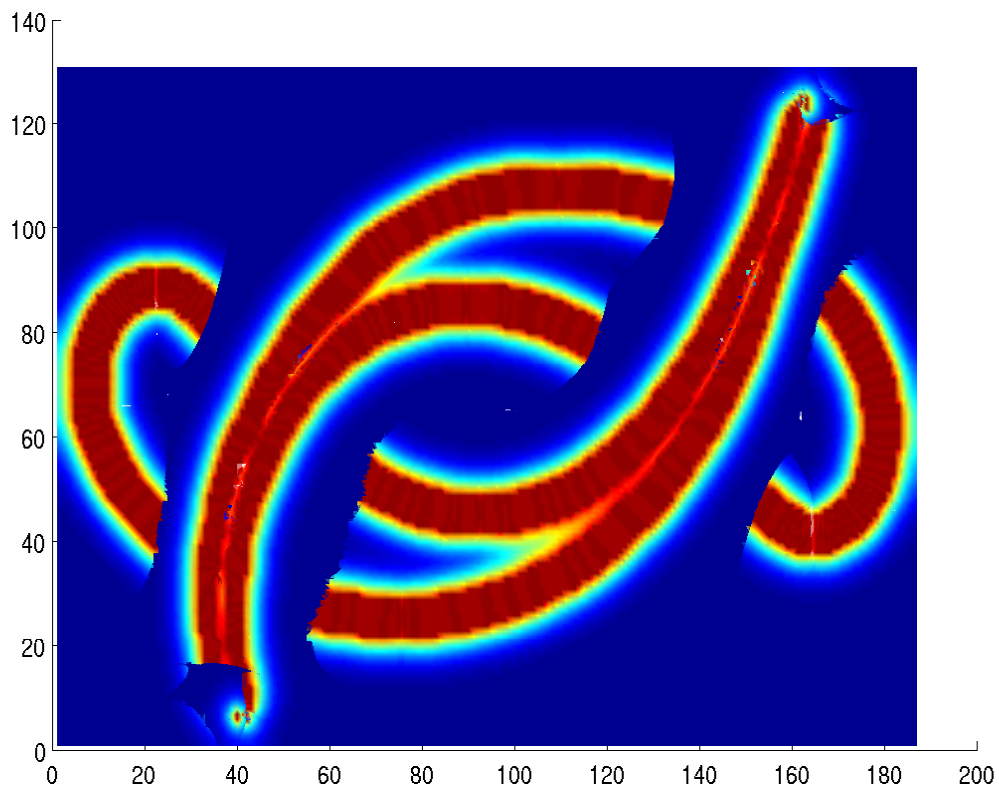
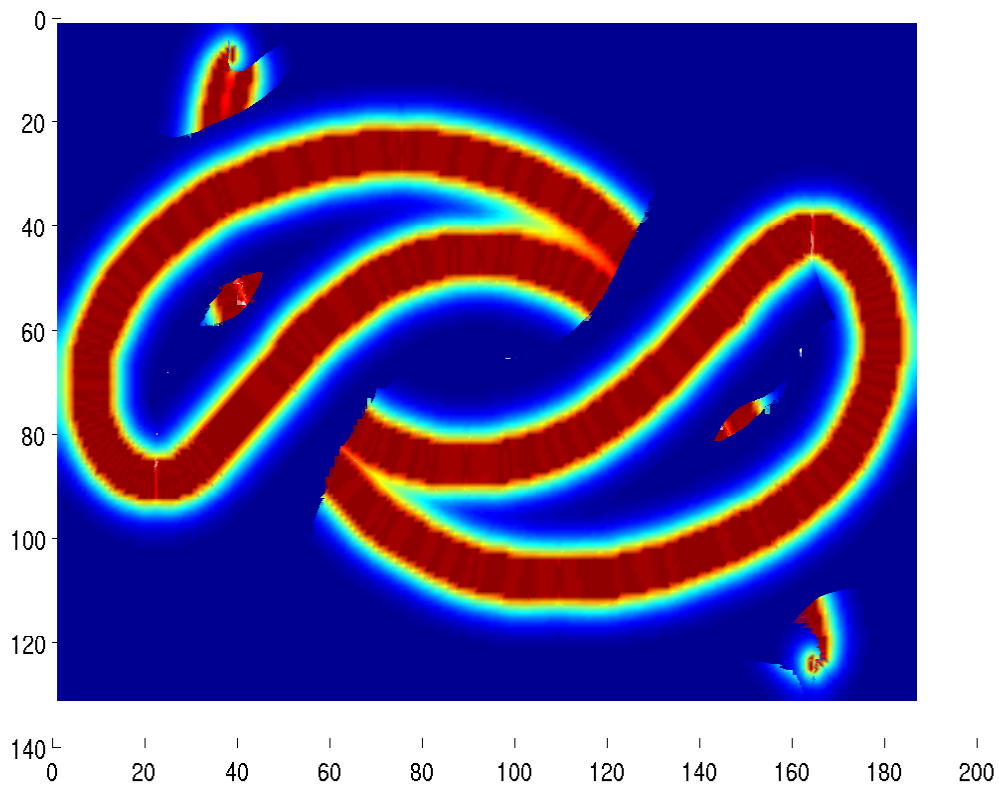


struttura sub-riemanniana della corteccia V1





struttura sub-riemanniana della corteccia V1



Direzioni di ricerca

La struttura della corteccia e' stata descritta come varieta' di contatto definita dalla forma

$$\omega = \cos(\theta)dx + \sin(\theta)dy$$

E' possibile rilevare altre features, per esempio la scala, ovvero la dimensione dei campi recettori. L'aggiunta di una variabile ambiente il problema in una varieta' simplettica, descritta dalla forma

$$d(e^{-s}\omega).$$