

MODELLO DINAMICO DI UNA IMBARCAZIONE DA CANOTTAGGIO



Luca Formaggia, Edie Miglio, Luca Del Grosso, Antonio Montano, Stefano Pandini
MOX, Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano
Via Bonardi 9, Milano



3 Novembre 2004

Indice

1	Descrizione del modello	2
1.1	Sistema di riferimento e convenzioni	3
1.2	Linearizzazione attorno ad una configurazione di riferimento	6
2	Le equazioni che governano la dinamica del sistema	7
2.1	La dinamica del sistema vogatore	7
2.2	La dinamica del sistema remo	8
2.3	La dinamica dello scafo isolato	9
2.4	Il sistema “scafo+vogatore+remo”	10
2.5	Le forze agenti sullo scafo	13
2.6	Implementazione del modello dinamico	19
3	Calcolo delle interazione fluidodinamica tramite un modello a potenziale	21
3.1	Calcolo del moto a potenziale	23
3.2	Massa aggiunta e matrice di smorzamento	25
3.3	Il sistema dinamico modificato	25
4	Un esempio	26
5	Calcolo dell’interazione fluidodinamica tramite un modello Navier-Stokes a superficie libera	29
5.1	La soluzione del fluido ai volumi finiti	29
5.2	L’accoppiamento tra il fluido e la struttura	30
5.3	Alcuni algoritmi <i>staggered</i>	32
5.4	L’accoppiamento fluido struttura adottato	35

Introduzione

Queste note si propongono di presentare un modello dinamico completo per una *imbarcazione da canottaggio* da competizione. A causa dell'effetto combinato dell'azione discontinua di spinta propria della vogata e dello spostamento del centro di massa a seguito del moto dei vogatori, una imbarcazione da canottaggio è soggetta a dei movimenti, che qui chiameremo *secondari*, non utili all'avanzamento. Anzi, tali moti sono causa di una resistenza addizionale dovuta sia alla dissipazione delle onde di superficie da essi generati, sia al continuo cambio di assetto della imbarcazione. La prima componente è quella che viene più specificatamente affrontata in questo lavoro.

La dinamica della vogata è stata studiata estensivamente, anche se la letteratura è formata principalmente da rapporti tecnici, spesso solo disponibili in rete. In particolare citiamo i lavori di W.C. Atkinson [?] (dove viene anche proposto un codice di simulazione), A. Dudhia [?] e M. van Holst [?]. In [?] L. Lazauskas propone un altro modello numerico per la dinamica della imbarcazione sottoposta alla spinta dei remi e al movimento dei vogatori. Tuttavia tutti questi modelli tengono in conto solo delle accelerazioni orizzontali e usano formule empiriche per simulare l'effetto dissipativo dovuto alla dispersione delle onde generate dai moti secondari (quando non lo trascurino completamente).

Altri lavori sulla dinamica della vogata sono stati condotti nell'ambito della progettazione di remoergometri, si veda per esempio i lavori di B. Elliott et al.[?] e di C.J.N. Rekers [?] relativamente al remoergometro *RowPerfect*. Chiaramente, anche qui ci si è interessati solo alla componente orizzontale, la sola che si vuole normalmente riprodurre con fedeltà in un remoergometro.

In questo lavoro invece, si è voluto sviluppare un modello completo che tenesse conto dei moti di affondamento e di beccheggio, oltre che, ovviamente, alle accelerazioni orizzontali. Il solo limite che ci si è posti è quello di assumere che il moto si svolga nel piano di simmetria della imbarcazione. Una ipotesi non limitativa per imbarcazioni di coppia e con equipaggi esperti. Per imbarcazioni condotte "a punta" questa ipotesi potrebbe risultare limitativa, in quanto tali imbarcazioni presentano durante il moto una componente non trascurabile di oscillazione attorno alla direzione media di avanzamento, dovuta alla tecnica di vogata. Tuttavia, non vi sono al momento, quanto meno nella letteratura disponibile, modelli che tengano conto di questa componente. Abbiamo inoltre proposto un modello semplificato per tenere conto degli effetti dissipativi delle onde generate dai moti secondari. Tale modello si basa su una approssimazione a potenziale e permette di stimare sia i termini di massa aggiunta che di smorzamento.

Il modello è estendibile: le funzioni usate per descrivere le forze esercitate sulla canoa e il moto dei vogatori sono state prese dalla letteratura, ma possono essere cambiate con facilità. Il modello tiene conto delle diverse configurazioni di equipaggio, e nel caso della configurazione nota come "quattro di coppia" si è proceduto alla illustrazione di risultati numerici. Inoltre si è tenuto conto delle forze idrostatiche, calcolate a partire dalla geometria reale dello scafo, e di quelle idrodinamiche, simulate con opportune formule empiriche. Il modello dinamico può essere interfacciato con modelli fluidodinamici più complessi, come è stato fatto nella Tesi di Laurea di S. Pandini [?]. La sua versione "stand alone" è stata implementata nel codice *Kimè* di cui questo rapporto rappresenta il manuale di riferimento per quanto riguarda il modello matematico in esso implementato.

Dopo una prima Sezione che descrive le generalità del modello dinamico, le principali ipotesi e il sistema di riferimento adottato, la Sezione 2 descrive il sistema di equazioni che governano la dinamica della imbarcazione e la sua implementazione. La Sezione 3 illustra un metodo per approssimare gli effetti di radiazione delle onde generate dai moti secondari usando un modello a potenziale. Nella Sezione 4 si riporta un risultato ottenuto con il modello in questione.

1 Descrizione del modello

Il sistema dinamico è pensato come l'unione di 3 sottosistemi interagenti.

1. *Lo scafo*. Ipotizzato come un corpo rigido (la massa dei carrelli in movimento è assunta trascurabile), libero di muoversi nel piano (X, Z) .
2. *I vogatori*. La loro massa è una parte importante, quando non dominante, della massa totale del sistema dinamico. Si ipotizza che ciascun vogatore si possa schematizzare come una massa concentrata in movimento. Si ipotizza anche che si muovano all'unisono. Quest'ultima ipotesi non è critica e si può eliminare se necessario.
3. *I remi*. Di massa trascurabile, in questo sistema dinamico la loro geometria serve solo a legare, qualora necessario, la forza agli scalmi, quella applicata alle braccia dei vogatori e la spinta in acqua del remo.

L'imbarcazione si muove di un moto medio orizzontale. Durante il moto, a causa della spinta in acqua dei remi e del movimento dei vogatori sulla imbarcazione, si creano dei movimenti *secondari*. Se facciamo riferimento alla figura 1 possiamo distinguere due moti traslatori ed uno rotatorio. Il primo movimento, lungo l'asse orizzontale, è il ben noto movimento di *accelerazione* orizzontale attorno al moto medio dovuto principalmente al movimento in orizzontale dei vogatori che sono seduti su dei carrelli mobili. L'indicheremo nel seguito semplicemente come *accelerazione orizzontale*. Il secondo movimento traslatorio è lungo l'asse verticale e lo chiameremo di *affondamento*. È legato al fatto che durante la vogata i vogatori esercitano una spinta sulle pedane, necessaria per dare maggior forza sul remo. Questa spinta ha necessariamente una componente verticale che varia nel corso del moto, ed in particolare viene bruscamente a mancare all'inizio del movimento di recupero, quando la pala viene sollevata dall'acqua e la spinta cessa.

Infine, il centro di massa dei vogatori si sposta a causa del movimento di vogata e allo spostamento del carrello. Questo induce un momento angolare, che si suppone allineato all'asse Y (rif. figure 2) e genera un movimento di *beccheggio*.

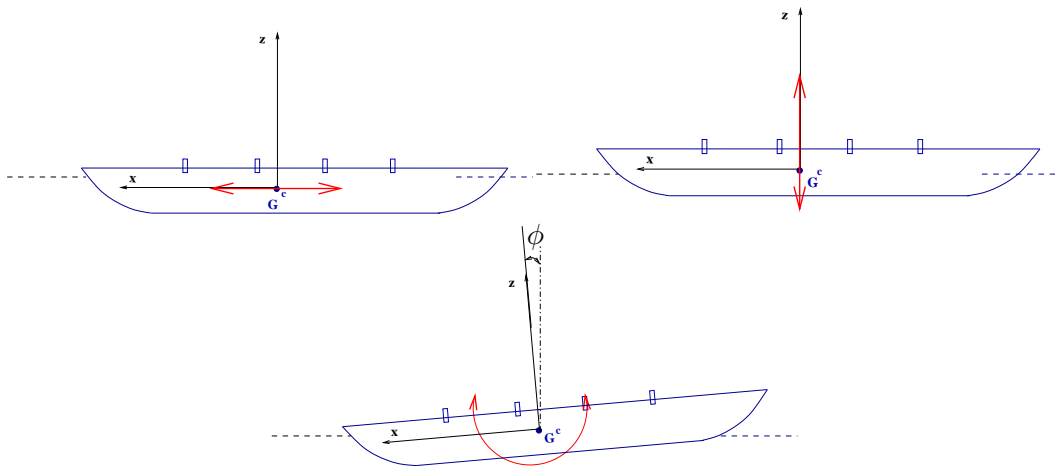


Figura 1: Moti “secondari” indotti dal movimento dei vogatori. Da sinistra a destra: moti di accelerazione orizzontale, moto di affondamento e di beccheggio.

1.1 Sistema di riferimento e convenzioni

Si consideri la figura 2. Essa illustra uno schema di scafo con 4 rematori. Si indica con $(O; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento Cartesiano assoluto (inerziale), e \mathbf{e}_X , \mathbf{e}_Y ed \mathbf{e}_Z indicheranno i versori corrispondenti. L'asse X è orizzontale, orientato convenzionalmente nel verso da poppa verso prua, quindi il modo medio della imbarcazione è sempre nel verso delle X positive. Il pelo libero dell'acqua (indisturbato) si trova a $Z = h^0$ (costante), essendo l'asse Z orientato verticalmente e h^0 la quota del pelo libero indisturbato. Quest'ultima va riferita alla imbarcazione ferma con i vogatori a bordo *in posizione statica*. Dato che il moto si svolge nel piano (X, Z) , tutte le forze in gioco sono assunte giacere su tale piano.

Un secondo sistema di riferimento è denominato *sistema di riferimento geometrico* ed è solidale allo scafo. Esso è quello in cui viene descritta la geometria dell'imbarcazione e ha origine nel punto di *poppa* della stessa. Gli assi coordinati, i cui versori sono \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z sono tali per cui \mathbf{e}_x e \mathbf{e}_z individuano il piano di simmetria dello scafo e \mathbf{e}_z è orientato dal fondo verso il bordo mentre \mathbf{e}_x ha verso da poppa a prua. In realtà questo secondo sistema di riferimento è qui usato solo per descrivere la geometria: dal punto di vista del modello dinamico è più conveniente utilizzare un sistema di riferimento solidale *centrato nel baricentro dello scafo* \mathbf{G}^c . Quest'ultimo sistema di riferimento, i cui versori \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z coincidono con quelli del riferimento geometrico verrà indicato come *sistema di riferimento relativo*, i cui assi coordinati sono x , y e z (si veda la figura 3). Si precisa che l'origine del sistema di riferimento relativo è stato fissato nel baricentro dello scafo e non nel baricentro del sistema dinamico scafo+vogatori.

Si indicheranno in *grassetto* le quantità vettoriali (e.g. \mathbf{f}) così come i punti di \mathbb{R}^2 . Si preferiranno le *lettere minuscole* per indicare punti nel sistema relativo, mentre le lettere maiuscole indicheranno i punti corrispondenti nel sistema di riferimento assoluto.

Per quanto riguarda i vettori si preferiranno le lettere minuscole per i vettori che sono più le cui coordinate sono espresse in modo più naturale nel sistema di riferimento locale, mentre si useranno principalmente le *lettere maiuscole* per vettori le cui coordinate sono più facilmente esprimibili nel sistema di riferimento assoluto. Questa distinzione non è stata seguita rigorosamente dato che (ovviamente) tutti i vettori possono alternativamente essere espressi in uno o l'altro dei due sistemi di riferimento a seconda della convenienza, come illustrato nella sezione 1.1. Le componenti saranno sempre indicate usando il carattere *corsivo* ed il pedice indicherà di quale componente si tratti. Per esempio, f_x indicherà la componente del vettore \mathbf{f} lungo la coordinata x del sistema relativo, mentre f_X sarà la componente dello stesso vettore lungo la coordinata X del sistema assoluto.

Durante il moto si generano delle onde dovute al movimento. Se consideriamo l'imbarcazione in moto rettilineo uniforme a velocità \mathbf{V} , trascurando quindi gli effetti dinamici dovuti alla azione del remo in acqua ed al movimento dei vogatore, si formeranno delle onde stazionarie che modificano il profilo del pelo libero nelle vicinanze della imbarcazione. Indicheremo con $h = h(X, Y)$ la quota di tale pelo libero, che chiameremo *pelo libero di riferimento*, mentre $\eta = \eta(t, X, Y)$ indicherà la *quota del pelo libero* nella configurazione corrente al tempo t . Quindi η terrà conto anche delle onde, di ampiezza $\eta - h$, generate dai moti secondari.

Nota 1 *La distinzione tra pelo libero indisturbato e pelo libero di riferimento è importante qualora si voglia considerare variazioni del pelo libero attorno alla configurazione di riferimento e non a quella indisturbata. Chiaramente, in una prima approssimazione, si potrà ignorare tale differenza e prendere $h = h^0$ costante. Questa approssimazione è stata adottata in tutti i risultati numerici prodotti in questo studio. Tuttavia il modello è stata scritto in forma generale.*

Nella figura 2 è indicato il *baricentro* \mathbf{G}^c dello scafo e la sua velocità \mathbf{V} . Sono altresì indicati, per $i = 1, \dots, n$, i *baricentri* \mathbf{G}^{v^i} , dei vogatori, la posizione \mathbf{p}^i delle pedane e le forze \mathbf{f}^{s^i} agli *scalni* esercitate sullo scafo. Qui n indica il *numero di vogatori*, quattro negli esempi riportati nelle figure. La

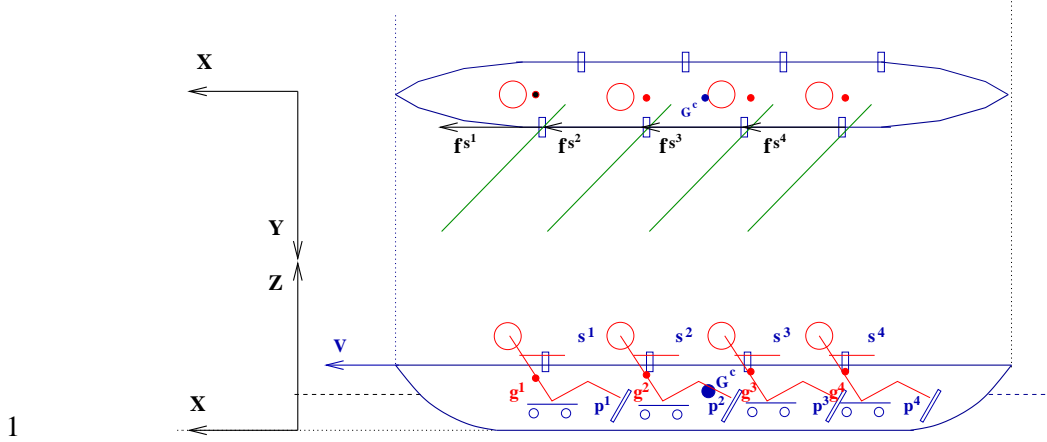


Figura 2: Schema di imbarcazione da canottaggio (4 rematori) e sistema di riferimento assoluto

figura 3 illustra il sistema di riferimento relativo ($\mathbf{G}^c; x, y, z$), e il sistema di riferimento geometrico, centrato nel punto di poppa P .

Un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ è esprimibile nel sistema assoluto come

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_X + v_Y \mathbf{e}_Y + v_Z \mathbf{e}_Z \quad (1)$$

Nel sistema solidale allo scafo,

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \quad (2)$$

Data una quantità vettoriale che varia nel tempo, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$, useremo la notazione

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{P}} = \frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2}.$$

Nota 2 Nel piano (X, Z) (così come nel piano (x, z)) l'orientazione positiva degli angoli è anti-oraria, in linea con la convenzione usualmente adottata nella meccanica.

Nota 3 Si noti che nella convenzione adottata un valore positivo di ϕ indica un abbassamento delle prua dell'imbarcazione.

Cambio di coordinate

I vettori posizione \mathbf{r}^P e \mathbf{R}^P associati allo stesso punto \mathbf{P} , rispettivamente nel sistema di riferimento relativo e assoluto, sono legati dalla relazione

$$\mathbf{r}^P = \mathbf{R}^P - \mathbf{G}^c. \quad (3)$$

Indicando con ϕ l'angolo di beccheggio, con $\mathcal{R}(\phi)$ e $\mathcal{R}^T(\phi)$ la matrice di rotazione e la sua trasposta definite come

$$\mathcal{R}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}^T(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (4)$$

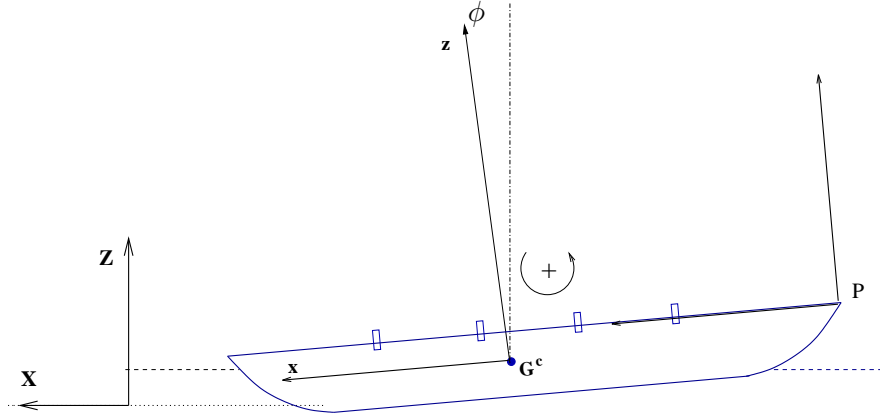


Figura 3: Schema di imbarcazione da canottaggio e sistemi di riferimento. Il sistema di riferimento geometrico e quello relativo differiscono solo nello spostamento dell'origine: il sistema relativo è centrato nel baricentro dello scafo, il sistema geometrico nel punto di poppa P .

le coordinate nei due sistemi di riferimento sono legate da

$$\begin{cases} r_x^P = (R_X^P - G_X^c) \cos \phi - (R_Z^P - G_Z^c) \sin \phi \\ r_y^P = (R_Y^P - G_Y^c) = R_Y^P \\ r_z^P = (R_X^P - G_X^c) \sin \phi + (R_Z^P - G_Z^c) \cos \phi \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} r_x^P \\ r_y^P \\ r_z^P \end{bmatrix} = \mathcal{R}(\phi) \begin{bmatrix} R_X^P - G_X^c \\ R_Y^P - G_Y^c \\ R_Z^P - G_Z^c \end{bmatrix}. \quad (5a)$$

Quest'ultima relazione può essere anche scritta nella forma

$$\begin{cases} r_x^P = r_X^P \cos \phi - r_Z^P \sin \phi \\ r_y^P = r_Y^P \\ r_z^P = r_X^P \sin \phi + r_Z^P \cos \phi \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} r_x^P \\ r_y^P \\ r_z^P \end{bmatrix} = \mathcal{R}(\phi) \begin{bmatrix} r_X^P \\ r_Y^P \\ r_Z^P \end{bmatrix}.$$

La trasformazione inversa è data da

$$\begin{cases} R_X^P = r_x^P \cos \phi + r_z^P \sin \phi + G_X^c \\ R_Y^P = r_y^P \\ R_Z^P = -r_x^P \sin \phi + r_z^P \cos \phi + G_Z^c \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} R_X^P \\ R_Y^P \\ R_Z^P \end{bmatrix} = \mathcal{R}^T(\phi) \begin{bmatrix} r_x^P \\ r_y^P \\ r_z^P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_X^c \\ 0 \\ G_Z^c \end{bmatrix}. \quad (5b)$$

Le componenti di un *vettore* \mathbf{f} si trasformano secondo la regola

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \mathcal{R}(\phi) \begin{bmatrix} f_X \\ f_Y \\ f_Z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_X \\ f_Y \\ f_Z \end{bmatrix} = \mathcal{R}^T(\phi) \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

Velocità e accelerazione relativa

Il sistema di riferimento relativo è solidale allo scafo, quindi la velocità assoluta $\mathbf{V}^P = \dot{\mathbf{P}}$ di un punto P e quella relativa \mathbf{v} sono legate dalla nota relazione

$$\mathbf{V}^P = \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{v}^P + \dot{\mathbf{G}}^c + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{G}^c),$$

essendo $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_Y$ il vettore velocità angolare. Si ha

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{G}^c) = \dot{\phi}[(P_Z - G_Z^c)\mathbf{e}_X - (P_X - G_X^c)\mathbf{e}_Z].$$

Per quanto riguarda l'accelerazione \mathbf{A}^P del punto \mathbf{P} , si ha la seguente relazione

$$\mathbf{A}^P = \ddot{\mathbf{P}} = \mathbf{a}^P + \ddot{\mathbf{G}}^c + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{P} - \mathbf{G}^c) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{G}^c) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^P, \quad (7)$$

con

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{P} - \mathbf{G}^c) = \ddot{\phi}[(P_Z - G_Z^c)\mathbf{e}_X - (P_X - G_X^c)\mathbf{e}_Z] \quad (8a)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{G}^c) = -\dot{\phi}^2[(P_X - G_X^c)\mathbf{e}_X + (P_Z - G_Z^c)\mathbf{e}_Z], \quad (8b)$$

mentre

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^P = 2\dot{\phi}(v_Z^P\mathbf{e}_X - v_X^P\mathbf{e}_Z) \quad (8c)$$

è l'*accelerazione di Coriolis*. Essendo le ultime relazioni tensoriali, e quindi indipendenti dal sistema di riferimento adottato, si hanno le identità seguenti:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{P} - \mathbf{G}^c) = \ddot{\phi}[p_z\mathbf{e}_z - p_x\mathbf{e}_x], \quad \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{G}^c) = -\dot{\phi}^2[p_x\mathbf{e}_x + p_z\mathbf{e}_z],$$

e

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^P = 2\dot{\phi}(v_z^P\mathbf{e}_x - v_x^P\mathbf{e}_z).$$

Si ricorda infine le relazioni che legano le basi nei due sistemi di riferimento

$$\mathbf{e}_X = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_x = \cos \phi \mathbf{e}_X - \sin \phi \mathbf{e}_Z \quad (9a)$$

$$\mathbf{e}_Y = \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_Y \quad (9b)$$

$$\mathbf{e}_Z = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_z = \sin \phi \mathbf{e}_X + \cos \phi \mathbf{e}_Z \quad (9c)$$

$$(9d)$$

1.2 Linearizzazione attorno ad una configurazione di riferimento

Se si fa l'ipotesi che i moti secondari siano sufficientemente piccoli si può linearizzare il sistema attorno alla configurazione di riferimento

$$\mathbf{G}_0^c = \mathbf{0}, \quad \phi = \phi_0, \quad \dot{\mathbf{G}}_0^c = \mathbf{0}, \quad \dot{\phi} = 0. \quad (10)$$

Inoltre, per semplicità prenderemo $\phi_0 = 0$.

Con questa ipotesi, la matrice di rotazione e la sua inversa possono essere approssimate rispettivamente con $\hat{\mathcal{R}}$ e $\hat{\mathcal{R}}^T$ date da

$$\hat{\mathcal{R}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \phi & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{R}}^T(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\phi & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Nelle stessi ipotesi si può adottare per le basi la approssimazione seguente:

$$\mathbf{e}_X \simeq \mathbf{e}_x + \phi \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_x \simeq \mathbf{e}_X - \phi \mathbf{e}_Z, \quad (12a)$$

$$\mathbf{e}_Y \simeq \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_y \simeq \mathbf{e}_Y, \quad (12b)$$

$$\mathbf{e}_Z \simeq -\phi \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_z \simeq \phi \mathbf{e}_X + \mathbf{e}_Z. \quad (12c)$$

$$(12d)$$

Le altre relazioni rimangono inalterate, se non per il fatto che il termine di forza centrifuga, essendo di ordine superiore rispetto a $\dot{\phi}$, è trascurata. Si ha quindi

$$\mathbf{A}^P \simeq \mathbf{a}^P + \ddot{\mathbf{G}}^c + \ddot{\phi}[(P_Z - G_Z^c)\mathbf{e}_X - (P_X - G_X^c)\mathbf{e}_Z] + 2\dot{\phi}(v_Z^P\mathbf{e}_X - v_X^P\mathbf{e}_Z)$$

2 Le equazioni che governano la dinamica del sistema

Considereremo qui le varie “componenti” del sistema dinamico e proporremo due modelli possibili, uno per il solo scafo, il secondo per il sistema dinamico completo scafo+vogatori. Un ruolo importante è giocato anche dal remo. Qui faremo per la azione del remo delle ipotesi semplificative. Modelli della azione del remo più sofisticati possono essere trovati in [?].

2.1 La dinamica del sistema vogatore

Sul generico vogatore agiscono le seguenti forze (rif. figura 4).

1. La *forza al braccio* \mathbf{f}^b ¹. La sua componente principale è chiaramente orizzontale e rappresenta la spinta di avanzamento della imbarcazione. Tuttavia, vi è anche una componente verticale dovuta essenzialmente alla azione della remata. Quindi avremo

$$\mathbf{f}^b(t) = -f_X^b(t)\mathbf{e}_X - f_Z^b(t)\mathbf{e}_Z. \quad (13)$$

dove $f_X^b \geq 0$. La forza al braccio può essere dedotta dalla forza agli scalmi, si veda la Sezione 2.2, tipicamente misurata sperimentalmente usando remoergometri.

2. la *forza di gravità*

$$\mathbf{f}^g = M^v \mathbf{g} = -M^v g \mathbf{e}_Z, \quad (14)$$

che è applicata al punto \mathbf{g}^v , centro di massa del vogatore, e diretta verso il basso.

3. $-\mathbf{f}^c$, la *forza al carrello*² che si presuppone si mantenga normale allo stesso con verso sempre opposto al fondo della canoa (il carrello è ovviamente un vincolo unilaterale). Questa ipotesi è realistica finchè il carrello non è a fine corsa, quando il vincolo sarebbe in grado di esercitare anche reazioni “orizzontali”. Si presuppone però che dei buoni vogatori arrivino a fine corsa del carrello in modo dolce, e quindi tale reazione sia minima. Si ha dunque

$$\mathbf{f}^c = f^c \mathbf{e}_z = f^c [\sin \phi \mathbf{e}_Z + \cos \phi \mathbf{e}_Z]. \quad (15)$$

Nel caso si linearizzasse il problema, si adotterà la approssimazione

$$\mathbf{f}^c \simeq f^c [\phi \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_Z]. \quad (16)$$

4. La *forza alla pedana*, $-\mathbf{f}^p$. Si possono fare due ipotesi. Nella prima (probabilmente più realistica) tale forze si può supporre allineata alla gamba del vogatore. La sua direzione viene allora descritta tramite l'angolo $\theta = \theta(t)$ tra la gamba e l'asse z (si veda la Figura 4), variabile nel corso del moto del vogatore stesso. In tal caso avremo

$$\mathbf{f}^p = -f^p (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_z) = -f^p [\cos(\theta + \phi) \mathbf{e}_X + \sin(\theta + \phi) \mathbf{e}_Z], \quad (17)$$

Questa rappresentazione richiede però di avere un modello cinematico del vogatore.

¹Nota: in questa descrizione la forza al braccio è quella applicata al vogatore e non al remo, quest'ultima è ovviamente pari a $-\mathbf{f}^b$.

²il segno negativo è dovuto al fatto che stiamo qui considerando la forza applicata al vogatore.

In assenza di tale modello si può adottare una ipotesi semplificativa che consiste nell'assumere che \mathbf{f}^p si mantenga sempre ortogonale alla pedana stessa, e quindi avremo

$$\mathbf{f}^p = -f^p(\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_z) = -f^p[\sin(\alpha + \phi) \mathbf{e}_X + \cos(\alpha + \phi) \mathbf{e}_Z], \quad (18)$$

essendo α l'angolo (fisso) che la pedana forma con il fondo dello scafo (rif. figura citata). Qui f^p rappresenta il modulo di \mathbf{f}^p ed il segno nella espressione data tiene conto che la forza esercitata sulla pedana è unilaterale. Nel *modello linearizzato* si ha

$$\mathbf{f}^p \simeq -f^p[(\sin \alpha + \phi \cos \alpha) \mathbf{e}_X + (\cos \alpha - \phi \sin \alpha) \mathbf{e}_Z] \quad (19)$$

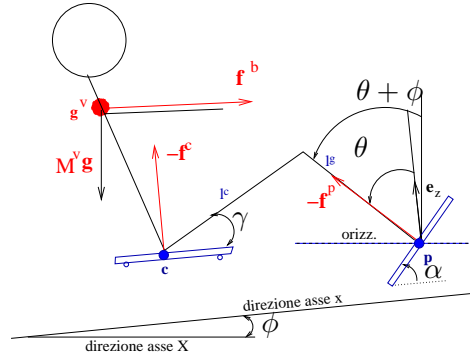


Figura 4: Schema del sistema dinamico “vogatore” con le forze agenti.

In forma vettoriale le equazioni che governano il moto del baricentro del vogatore sono

$$M^v \frac{d^2 \mathbf{G}^v}{dt^2} = M^v \ddot{\mathbf{G}}^v = \mathbf{f}^b + M^v \mathbf{g} - \mathbf{f}^c - \mathbf{f}^p \quad (20a)$$

$$\mathbf{0} = -(\mathbf{c} - \mathbf{G}^v) \times \mathbf{f}^c - (\mathbf{p} - \mathbf{G}^v) \times \mathbf{f}^p \quad (20b)$$

Nel modello più complesso, queste equazioni vanno complementate con un modello cinematico del vogatore che legghi lo spostamento del carrello all'angolo θ .

2.2 La dinamica del sistema remo

Si fa l'ipotesi semplificativa di assumere che il remo agisca come una leva perfetta, dove la massa è trascurabile, la rigidità infinita e le forze agenti sono costantemente autoequilibrate. Quest'ultime sono $-\mathbf{f}^s$, $-\mathbf{f}^b$ e la forza \mathbf{f}^r che rappresenta la forza esercitata dall'acqua sulla pala del remo.

La conservazione della quantità di moto fornisce quindi (rif. figura 5)

$$\mathbf{f}^b L_r + \mathbf{f}^s (L_r - r_b) = 0 \rightarrow \mathbf{f}^s = -\mathbf{f}^b \frac{L_r}{L_r - r_b} \quad (21)$$

mentre l'equilibrio delle forze comporta che

$$\mathbf{f}^r = \mathbf{f}^b + \mathbf{f}^s = -\frac{r_b}{L_r - r_b} \mathbf{f}^b = \frac{r_b}{L_r} \mathbf{f}^s. \quad (22)$$

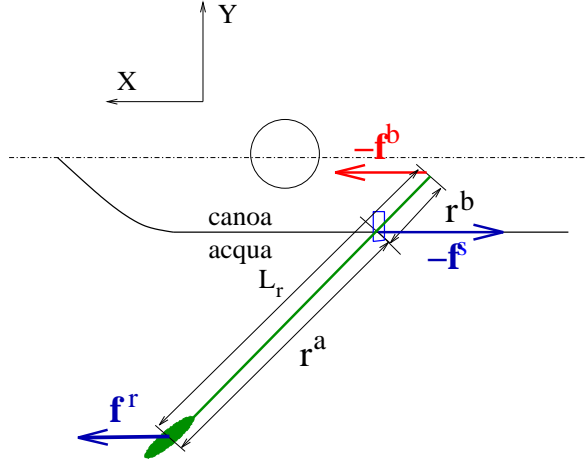


Figura 5: Schema del sistema di forze agenti sul remo.

2.3 La dinamica dello scafo isolato

Consideriamo qui l'imbarcazione come corpo a se stante su cui agiscono le forze dovute dalla interazione con il vogatore, il remo e l'acqua.

L'interazione idrodinamica viene riassunta attraverso la sua risultante \mathbf{F}^a e momento $\mathbf{M}^a = M^a \mathbf{e}_Y$ rispetto al baricentro \mathbf{G}^c della scafo (si veda la sezione 2.5 a pagina 14). Tale interazione è, in generale, funzione della velocità della imbarcazione e del suo assetto.

Per rendere la scrittura più leggera, indichiamo con \mathbf{y} il vettore contenente le incognite del nostro problema, cioè

$$\mathbf{y} = [\dot{G}_X^c, \dot{G}_Y^c, \dot{\phi}, G_X^c, G_Y^c, \phi]^T;$$

possiamo allora scrivere in tutta generalità che $\mathbf{F}^a = \mathbf{F}^a(\mathbf{y})$ e $M^a = M^a(\mathbf{y})$. Le altre forze sono la forza peso $M^c \mathbf{g}$, le forze alle pedane $\mathbf{f}^{p^i} = \mathbf{f}^{p^i}(t)$, ai carrelli $\mathbf{f}^{c^i} = \mathbf{f}^{c^i}(t)$ e agli scalmi $\mathbf{f}^{s^i} = \mathbf{f}^{s^i}(t)$, con $i = 1, \dots, n$. I punti di applicazioni di quest'ultime sono, rispettivamente il baricentro \mathbf{G}^c , i centri delle pedane \mathbf{p}^i e dei carrelli \mathbf{c}^i , e gli scalmi \mathbf{s}^i . Le pedane e gli scalmi sono solidali allo scafo; mentre i carrelli si muovono di moto *assegnato* lungo l'asse x , i.e. $\mathbf{c}^i = \mathbf{c}^i(t)$ [?]³. Si suppone che la massa del carrello sia piccola rispetto alla massa complessiva M^c dello scafo, per cui il baricentro del sistema è solidale allo scafo stesso. Questa schematizzazione ha il vantaggio che la dinamica del sistema è quello di un corpo rigido: gli effetti dinamici legati ai movimenti dei vogatori sono "esterni" al sistema e si esplicano attraverso le forze agenti (in particolare \mathbf{f}^p e \mathbf{f}^c) di cui l'espressione *si assume essere nota*.

Indicando con I_Y^c l'inerzia angolare, rispetto all'asse Y , dello scafo, il sistema dinamico in coordinate assolute si scrive come segue, per $t > 0$,

$$M^c \ddot{\mathbf{G}}^c(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}^{s^i}(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{f}^{c^i}(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{f}^{p^i}(t) + M^c \mathbf{g} + \mathbf{F}^a(\mathbf{y}(t)), \quad (23a)$$

$$I_Y^c \ddot{\phi}(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{s}^i - \mathbf{G}^c) \times \mathbf{f}^{s^i}(t) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{c}^i(t) - \mathbf{G}^c) \times \mathbf{f}^{c^i}(t) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{p}^i - \mathbf{G}^c) \times \mathbf{f}^{p^i}(t) + M^a(\mathbf{y}(t)). \quad (23b)$$

³La legge di moto del carrello è ovviamente legata alla cinematica del vogatore e quindi anche allo stile di vogata. I dati in letteratura si riferiscono a una vogata "standard".

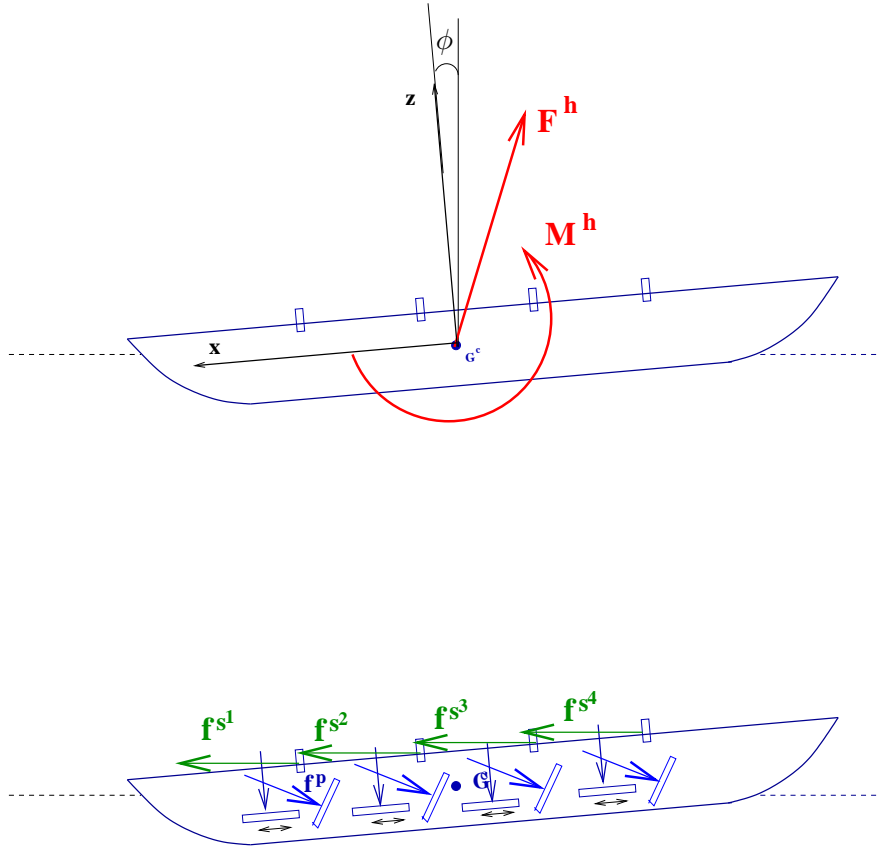


Figura 6: Schema del sistema di forze agenti sullo scafo isolato.

Si è preso $t = 0$ come tempo iniziale per il nostro problema differenziale, in corrispondenza al quale occorre fornire le condizioni iniziali per \mathbf{G}^c , $\dot{\mathbf{G}}^c$, ϕ e $\dot{\phi}$. L'ultima equazione è scalare in quanto tutte le forze giacciono sul piano. Da questo punto in poi si considereranno vettori bidimensionale $\mathbf{v} = (v_x, v_z)$ e si utilizza la definizione seguente $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = b_z a_x - b_x a_z$, valida per ogni coppia di vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} nel piano (X, Z) .

Le forze incognite di questo sistema sono determinabili utilizzando dati di letteratura o rilevazioni sperimentali. Una alternativa è considerare invece il sistema dinamico accoppiato scafo+vogatore+remo. In questo caso, le forze ai carrelli e alle pedane sono *forze interne* del sistema e quindi a risultante nulla. Il prezzo che si paga è che il moto dei vogatori apparirà ora esplicitamente nelle equazioni sotto forma di forze inerziali, in quanto il baricentro di questo sistema dinamico è mobile nel tempo.

2.4 Il sistema “scafo+vogatore+remo”

In questo sistema dinamico assumeremo di *conoscere* la legge del moto dei vogatori, $\mathbf{g}^v = \mathbf{g}^v(t) = (g_x^v(t), g_z^v(t))$, nel sistema di riferimento relativo. Tale legge può essere determinata, per esempio, tramite rilevazioni sperimentali o attraverso un modello cinematico del vogatore.

Nota 4 Tipicamente tale legge non verrà fornita nel sistema di riferimento relativo ma in uno traslato e centrato nella posizione della pedana corrispondente a ciascun vogatore, o più precisamente al piede del vogatore. Il motivo è evidente: il piede è il solo punto del vogatore solidale allo scafo ed

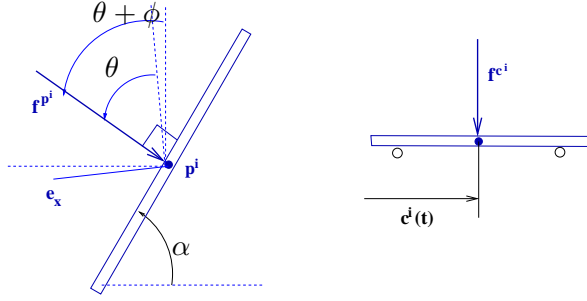


Figura 7: Dettaglio delle forze agenti sulla pedana e sul carrello.

è quindi più conveniente riferire la dinamica del vogatore rispetto a tale punto. La figura 8 illustra tale situazione. Un semplice cambio di coordinate riporterà però la legge di moto nel sistema di riferimento relativo. Ecco perchè, per evitare di introdurre ulteriori notazioni, nel seguito useremo la legge del moto direttamente nel sistema di riferimento relativo.

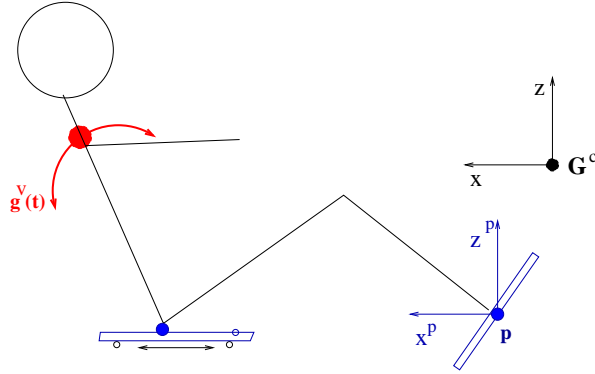


Figura 8: Per ragioni di praticità, la legge del movimento dei vogatori $\mathbf{g}^v(t)$ viene fornita in un sistema di riferimento con origine nel piede del vogatore, qui indicato con (x^p, z^p) . Per l'uso nel modello dinamico, però viene trasformata nel sistema di riferimento relativo, che ha origine nel baricentro dello scafo.

Chiaramente, nel sistema di riferimento assoluto avremo:

$$\mathbf{G}^v - \mathbf{G}^c = \mathcal{R}^T(\phi)\mathbf{g}^v \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} g_X^v = G_X^v - G_X^c = \cos \phi g_x^v + \sin \phi g_z^v, \\ g_Z^v = G_Z^v - G_Z^c = -\sin \phi g_x^v + \cos \phi g_z^v \end{cases} \quad (24)$$

Per quanto riguarda l'accelerazione si ha, esplicitando tutti i contributi inerziali,

$$\ddot{\mathbf{G}}^v = \ddot{\mathbf{G}}^c + \mathcal{R}^T(\phi)\ddot{\mathbf{g}}^v + \ddot{\phi}(g_z^v\mathbf{e}_X - g_x^v\mathbf{e}_Z) + 2\dot{\phi}(\dot{g}_z^v\mathbf{e}_X - \dot{g}_x^v\mathbf{e}_Z) - \dot{\phi}^2(g_x^v\mathbf{e}_X + g_z^v\mathbf{e}_Z).$$

Usando (24) ed introducendo la matrice di rotazione $\mathcal{O}(\phi) = \frac{d}{d\phi}\mathcal{R}^T(\phi)$,

$$\mathcal{O}(\phi) = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \\ -\cos \phi & -\sin \phi \end{bmatrix}, \quad (25)$$

si ha, in forma più compatta,

$$\ddot{\mathbf{G}}^v = \ddot{\mathbf{G}}^c + \mathcal{R}^T(\phi)\ddot{\mathbf{g}}^v + \ddot{\phi}\mathcal{O}(\phi)\mathbf{g}^v + 2\dot{\phi}\mathcal{O}(\phi)\dot{\mathbf{g}}^v - \dot{\phi}^2\mathcal{R}^T(\phi)\mathbf{g}^v. \quad (26)$$

Sempre allo scopo di semplificare la scrittura delle equazioni, si introduce la *massa totale dei vogatori* $M_t^v = \sum_i M^{v^i}$ e indicheremo con $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$ la norma Euclidea del vettore \mathbf{v} e con $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_z b_z$ il prodotto scalare.

In coerenza con (20b) assumeremo che i momenti rispetto al baricentro della imbarcazione generati dalle forze ai remi siano *trascurabili* rispetto agli altri. Questo permette di semplificare l'equazione del momento. Accoppiando le equazioni della dinamica dello scafo, del vogatore e del remo si perviene al seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie per il problema accoppiato, sempre per $t > 0$,

$$M^c \ddot{\mathbf{G}}^c(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}^{v^i}(t) - \sum_{i=1}^n M^{v^i} \ddot{\mathbf{G}}^{v^i}(t) + (M_t^v + M^c)\mathbf{g} + \mathbf{F}^a(\mathbf{y}(t)), \quad (27a)$$

$$I_Y^c \ddot{\phi}(t) = - \sum_{i=1}^n M^{v^i} (\mathbf{G}^{v^i}(t) - \mathbf{G}^c) \times \ddot{\mathbf{G}}^{v^i}(t) + \sum_{i=1}^n M^{v^i} (\mathbf{G}^{v^i}(t) - \mathbf{G}^c) \times \mathbf{g} + M^a(\mathbf{y}(t)), \quad (27b)$$

Chiaramente, le equazioni (27) non sono ancora nella forma canonica in quanto la (26) evidenzia come l'accelerazione dei vogatori nel sistema di riferimento assoluto dipenda anche dalle accelerazioni lineari ed angolari della imbarcazione stessa. Occorre quindi sostituire le (26) in (27). Svolgendo tutti i conti si ottiene infine

$$\begin{aligned} & M \ddot{\mathbf{G}}^c + \left(\mathcal{O}(\phi) \sum_{i=1}^n M^{v^i} \mathbf{g}^{v^i} \right) \ddot{\phi} = \\ & -2\dot{\phi}\mathcal{O}(\phi) \sum_{i=1}^n M^{v^i} \dot{\mathbf{g}}^{v^i} - \dot{\phi}^2 \mathcal{R}^T(\phi) \sum_{i=1}^n M^{v^i} \mathbf{g}^{v^i} - \mathcal{R}^T(\phi) \sum_{i=1}^n M^{v^i} \ddot{\mathbf{g}}^{v^i} + \mathcal{R}^T(\phi) \sum_{i=1}^n \mathbf{f}^{v^i}(t) + M\mathbf{g} + \mathbf{F}^a, \end{aligned} \quad (28a)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{R}^T(\phi) \sum_{i=1}^n M^{v^i} \mathbf{g}^{v^i} \right) \times \ddot{\mathbf{G}}^c + \left(I_Y^c + \sum_{i=1}^n M^{v^i} \|\mathbf{g}^{v^i}\|^2 \right) \ddot{\phi} = \\ & -2\dot{\phi} \sum_{i=1}^n M^{v^i} \mathbf{g}^{v^i} \cdot \dot{\mathbf{g}}^{v^i} - \sum_{i=1}^n M^{v^i} \mathbf{g}^{v^i} \times \ddot{\mathbf{g}}^{v^i} + \sum_{i=1}^n M^{v^i} (G_X^{v^i} - G_X^c)g. \end{aligned} \quad (28b)$$

Qui g è il modulo della accelerazione di gravità (9.81 m/s^2).

Nota 5 Si è qui omissso di explicitare la dipendenza dei vari termini dalla variabile temporale. Tutti i termini, tranne M , M^c , M_t^v , I_Y^c e \mathbf{G}^c dipendono, direttamente o indirettamente, dal tempo. Si ricorda inoltre che $M = M^c + M_t^v$.

Nota 6 Si ricorda ancora che questo sistema richiede la conoscenza del moto del vogatore, cioè la legge $t \rightarrow \mathbf{g}^{v^i}(t)$. Una alternativa può essere utilizzare una legge ricavata da osservazioni sperimentali (o altro) solo per la componente orizzontale del moto dei vogatori, mentre la componente verticale può essere dedotta sfruttando opportunamente (20a).

Il *modello linearizzato* può essere dedotto facilmente, trascurando i termini in $\dot{\phi}^2$ (accelerazione centrifuga) e usando la seguente approssimazione per \mathcal{O}

$$\mathcal{O}(\phi) \simeq \begin{bmatrix} -\phi & 1 \\ -1 & -\phi \end{bmatrix} \quad (29)$$

2.5 Le forze agenti sullo scafo

Si analizzano nel seguito le forze esterne agenti sul sistema *scafo+vogatori* che nell'espressione matematica compaiono raccolte sotto F_X^a , F_Z^a e M^a . Forniremo anche dettagli su come sono fornite le forze ai remi e la legge di movimento. Affrontiamo qui le forze che agiscono sul moto medio della imbarcazione. Le componenti più propriamente dovute ai moti secondari verranno trattate nella Sezione 3. Avremo delle *forze idrostatiche* dovute all'azione del galleggiamento e delle *forze idrodinamiche* dovute alla interazione dello scafo con il moto dell'acqua (e dell'aria).

L'azione idrodinamica

Le forze \mathbf{F}^a e il momento M^a vengono scomposti in diverse componenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^a &= S^a \mathbf{e}_Z - R^a \mathbf{e}_X + \mathbf{D}^a, \\ M^a &= M_S^a + M_D^a. \end{aligned} \quad (30)$$

S^a è la componente di spinta di galleggiamento, che può anche generare un momento, indicato come M_S^a , di entrambi si parlerà più estensivamente nel prossimo paragrafo. R^a è la componente di *resistenza* di cui parleremo tra poco. \mathbf{D}^a e M_D^a sono i contributi dissipativi dovuti ai moti secondari, che verranno meglio analizzati nella Sezione 3.

Consideriamo innanzitutto il termine R^a ; considerando il fatto che l'unico elemento propulsivo della barca è il remo, esso contribuisce esclusivamente alla resistenza all'avanzamento dell'imbarcazione, il che giustifica il segno negativo adottato in (30). La sua determinazione richiederebbe la risoluzione delle equazioni del moto del fluido attorno alla imbarcazione. In questo lavoro si è preferito *modellarle* con formule empiriche che possono eventualmente essere integrate con calcoli fluidodinamici. Si può a sua volta separare in due diverse categorie, aerodinamica e idrodinamica.

La resistenza aerodinamica sull'equipaggio e sulla porzione dello scafo emersa è molto difficile da stimare. Nello studio di una imbarcazione singola, A. Millward [?] utilizza un coefficiente per la resistenza di una figura umana in posizione eretta. Per configurazioni di imbarcazioni con più membri si introducono dei fattori di interferenza tra corpi che in questo modello verranno trascurati. Si assume che la resistenza aerodinamica sia proporzionale alla sezione frontale dei rematori e sulla base delle stime effettuate da A. Millward si utilizza la seguente formula:

$$R_{air} = C_{air} M_v^{\frac{2}{3}} (\dot{G}_X^c)^2.$$

con $C_{air} = 0.02$. Per equipaggi multipli si moltiplicherà tale espressione per il numero di vogatori.

I termini che fanno parte della resistenza idrodinamica sono principalmente tre: la *resistenza di forma*, la *resistenza viscosa* e la *resistenza d'onda*. Il valore della prima viene calcolata secondo la classica espressione,

$$R_{shape} = \frac{1}{2} \rho \Gamma_X^b C_{dX} (\dot{G}_X^c)^2,$$

dove ρ è la densità dell'acqua, C_{dX} il coefficiente di resistenza di forma, Γ_X^b è la sezione massima della scafo immerso, quest'ultimo dato viene calcolato ad ogni istante, dal momento che il suo valore è funzione dell'affondamento. Un valore tipico di C_{dX} è 0.01.

La resistenza viscosa viene stimata usando un'espressione ricavata da codici nautici (più precisamente la *ITTC ship correlation line* [?]), più precisamente

$$C_f = \frac{C_{f0}}{(\log(Re) - 2)^2}, \quad (31)$$

$$R_{vis} = \frac{1}{2}\rho C_f \Gamma^b (\dot{G}_X^c)^2, \quad (32)$$

dove C_f è il coefficiente di resistenza viscosa, Γ^b la superficie bagnata, funzione anch'essa della configurazione dell'imbarcazione e C_{f0} il coefficiente asintotico a $Re = 0$ qui preso pari a $C_{f0} = 0.075$.

Per quanto riguarda la resistenza d'onda, indicando con Γ_Z^b la superficie bagnata proiettata sul pelo libero, si ha

$$R_{wave} = \frac{1}{2}\rho \Gamma_Z^b C_{dw} (\dot{G}_X^c)^2,$$

dove C_{dw} è il coefficiente di resistenza d'onda il cui valore è stato posto pari a $C_{dw} = 0.02$. Queste relazioni si possono far risalire al lavoro di J.H. Mechell [?].

In conclusione,

$$R^a = R_{air} + R_{shape} + R_{vis} + R_{wave}. \quad (33)$$

L'azione idrodinamica dovuta alla pressione

La pressione idraulica agente sulla scafo contribuisce in direzione verticale sia alla *spinta idrostatica* di galleggiamento, legata alla componente idrostatica della pressione, sia alla *spinta dinamica*, legata invece alla componente dinamica della pressione. Quest'ultima è responsabile del fenomeno della *planata*, un effetto importante in una imbarcazione di canottaggio, che però non viene considerata nella parte del lavoro riportata in questo rapporto. Inoltre, la distribuzione istantanea della pressione contribuisce alla resistenza d'onda e alla resistenza di forma, che in questo lavoro sono state modellate nel modo illustrato nel paragrafo precedente. La pressione è anche la principale responsabile della componente di dissipazione legata ai moti secondari, che qui viene calcolata come illustrato nella Sezione 3.

In questo paragrafo si descrive tuttavia in tutta generalità come si può calcolare la risultante e il momento dovuto alla azione della pressione anche nel modello dinamico qui proposto è stata implementata nel modo qui di seguito descritto solo la componente idrostatica.

Indichiamo con $\tilde{\Gamma}$ la *superficie esterna* dello scafo nella *configurazione di riferimento*. Come già precisato la configurazione di riferimento corrisponde allo scafo fermo e a pieno carico e con $\phi = \phi_0$ corrispondente all'angolo di "equilibrio statico". Convenzionalmente (e senza perdita di generalità) supporremo che al tempo $t = 0$ l'imbarcazione si trovi nella configurazione di riferimento ed indicheremo con il pedice $_0$ le quantità relative a tale configurazione, ed in particolare prenderemo $\mathbf{G}_0^c = (0, 0, G_Z^c)$.

Senza perdita di generalità supporremo che $\tilde{\Gamma}$ sia descritta parametricamente nel sistema di coordinate solidali alla imbarcazione, cioè,

$$\tilde{\Gamma} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in S \subset \mathbb{R}^2\},$$

dove \mathbf{u} in punto del cosiddetto *piano parametrico* S è un dominio limitato di tale piano.

Nota 7 Il fatto di assumere una rappresentazione parametrica non è limitativa, nel senso che una rappresentazione esplicita della superficie del tipo $z = \psi(x, y)$ ricade nel caso generale, purchè si ponga $u = x, v = y$ e

$$(u, v) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \psi(u, v) \end{bmatrix}. \quad \text{In questo caso } \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \psi(u, v) \end{bmatrix}.$$

Sia ora $H(\mathbf{X})$ la funzione definita come

$$H(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

Tornerà utile nel seguito, per semplificare le formule, introdurre anche le seguenti notazioni,

$$Q(t, \mathbf{X}) = \eta(t, X, Y) - Z, \quad q(\mathbf{X}) = h(X, Y) - Z \quad (34)$$

che definiscono per ogni $t > 0$ la profondità rispettivamente dal pelo libero dinamico e da quello “congelato” nello stato d’onda (stazionaria) di riferimento. Chiameremo quest’ultima *quota di riferimento*, nel sistema assoluto.

Useremo inoltre le notazioni seguenti per indicare tali quote nel sistema solidale allo scafo

$$\tilde{Q}(t, \mathbf{x}) = Q(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})), \quad \tilde{q}(t, \mathbf{x}) = q(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) = h(x, y) + x \sin \phi(t) - z \cos \phi(t) - G_Z^c(t),$$

mentre indicheremo con $\tilde{q}_0(\mathbf{x}) = h(x, y) + x \sin \phi_0 - z \cos \phi_0 - G_{Z,0}^c$ la quota di riferimento nella configurazione di riferimento (nel sistema relativo).

Nota 8 Si noti come \tilde{q}_0 non dipenda dal tempo, mentre \tilde{q} cambia nel tempo a causa dei movimenti secondari della imbarcazione. Infine, q è stazionaria grazie alla scelta opportuna del sistema di riferimento assoluto $(O; X, Y, Z)$, che, ripetiamo, è un sistema che si muove rispetto alla “riva” di modo traslatorio uniforme con velocità pari alla velocità media della imbarcazione. In altre parole, Q e q sono le quote dal pelo libero effettivo e da quello di riferimento misurate da un osservatore che si muova lungo il canale di regata alla velocità media dell’imbarcazione. $q(\mathbf{X})$ non dipende dal tempo in quanto l’onda di riferimento è stazionaria rispetto a tale osservatore. \tilde{Q} e \tilde{q} sono le stesse quote, ma misurate nel sistema di coordinate “dai vogatori”. Anche se il pelo libero è stazionario \tilde{q} non lo è a causa dei movimenti di beccheggio e di accelerazione dello scafo.

Durante il moto la superficie si trasforma secondo le leggi del moto rigido, e quindi, se $\phi(t)$ è l’angolo di beccheggio al tempo $t > 0$ e $\mathbf{G}^c(t)$ la corrispondente posizione del baricentro dello scafo, un punto $\mathbf{x} \in \tilde{\Gamma}$ si trasforma nel punto $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ della *superficie corrente* secondo la legge

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) = \mathcal{R}^T(\phi(t))(\mathbf{x} - \mathbf{G}_0^c) + \mathbf{G}^c(t).$$

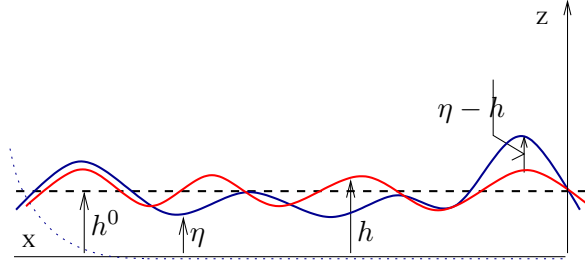


Figura 9: Diversi tipi di “pelo libero”. h^0 è il pelo libero indisturbato, a quota costante; $h = h(X, Y)$ è il pelo libero di riferimento, stazionario rispetto al sistema di riferimento assoluto scelto e dipendente dalla velocità media; $\eta = \eta(t, X, Y)$ è il pelo libero corrente, che dipende dal movimento effettivo dello scafo (e quindi anche dai moti secondari).

Quindi la superficie esterna dell’imbarcazione nella *configurazione corrente*, $\Gamma(t)$, può essere definita per ogni $t \geq 0$ come

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \tilde{\Gamma}\}. \quad (35)$$

Alternativamente, potremmo definirla facendo riferimento al piano parametrico,

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \mathbf{r}(u)), \mathbf{u} \in S\}. \quad (36)$$

La sua parte bagnata è data da

$$\Gamma^b(t) = \{\mathbf{X}(t) \in \Gamma(t) : H(Q(t, \mathbf{X})) = 1\}. \quad (37)$$

La *superficie bagnata* al tempo t riportata nella configurazione di riferimento è allora data da

$$\tilde{\Gamma}_t^b = \{\mathbf{x} \in \tilde{\Gamma} : H(\tilde{Q}(t, \mathbf{x})) = 1\} \quad (38)$$

mentre la *superficie bagnata* di riferimento è

$$\tilde{\Gamma}_0^b = \{\mathbf{x} \in \tilde{\Gamma} : H(\tilde{q}_0(\mathbf{x})) = 1\} \quad (39)$$

Si ricorda la seguente regola per l’integrazione su superfici parametriche,

$$\int_{\Gamma(t)} f(\mathbf{x}) d\gamma = \int_S f(\mathbf{r}(\mathbf{u})) J(t, \mathbf{u}) du dv$$

con $J(t, \mathbf{u}) = \left\| \frac{\partial \mathbf{X}(t, \mathbf{r}(\mathbf{u}))}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}(t, \mathbf{r}(\mathbf{u}))}{\partial v} \right\|$. Dato che la trasformazione è rigida, si ha che, per ogni $t \geq 0$,

$$J(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{r}(\mathbf{u})) = J_0(\mathbf{u}) = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial v} \right\|.$$

A meno del segno, la normale esterna al punto $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{u})$ è

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial v}}{J_0(\mathbf{u})}.$$

D'altra parte essendo il moto rigido, la normale \mathbf{N} nel punto corrispondente $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ è data dalla relazione

$$\mathbf{N}(\mathbf{X}) = \mathcal{R}^T(\phi)\mathbf{n}(\mathbf{x}),$$

per un dato angolo di beccheggio ϕ .

Per convenzione, adotteremo per la normale il verso *esterno* alla superficie dell'imbarcazione. In altre parole \mathbf{N} è orientata "verso l'acqua".

Nota 9 Negli integrali la dipendenza di \mathbf{n} e \mathbf{N} rispettivamente da \mathbf{x} e \mathbf{X} sarà normalmente sottointesa.

Da un punto di vista pratico può essere conveniente calcolare un integrale sulla superficie bagnata trasformandolo in un integrale su tutta la superficie, sfruttando il fatto che

$$\int_{\Gamma^b(t)} f(\mathbf{X})d\gamma = \int_{\Gamma(t)} f(\mathbf{X})H(Q(t, \mathbf{X}))d\gamma. \quad (40)$$

Le forze idrauliche che consideriamo qui sono quelle dovute all'azione della pressione sulla superficie bagnata dello scafo. Indicando con ρ la densità dell'acqua, la pressione verrà suddivisa in una parte *idrostatica di riferimento* pari a

$$p_h = p_h(\mathbf{X}) = \rho g q(\mathbf{X}),$$

una parte dovuta al differenziale idrostatico causato dalle onde generate dai moti secondari,

$$p_\eta(t, \mathbf{X}) = \rho g(Q(t, \mathbf{X}) - q(\mathbf{X})) = \rho g(\eta(t, X, Y) - h(X, Y))$$

e in una parte *dinamica* $p_d = p_d(t, \mathbf{X})$. Quindi

$$p(t, \mathbf{X}) = p_h(\mathbf{X}) + p_\eta(t, \mathbf{X}) + p_d(t, \mathbf{X}).$$

Si ha quindi, mettendo in evidenza la dipendenza delle variabili dal tempo t e dalla posizione,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p^a(t) = & -\rho g \int_{\Gamma^b(t)} q(\mathbf{X})\mathbf{N}d\gamma - \rho g \int_{\Gamma^b(t)} (\eta(t, X, Y) - h(X, Y))\mathbf{N}d\gamma - \\ & - \int_{\Gamma^b(t)} p_d(t, \mathbf{X})\mathbf{N}d\gamma = \mathbf{F}_h^a(t) + \mathbf{F}_\eta^a(t) + \mathbf{F}_d^a(t) \end{aligned} \quad (41)$$

mentre

$$\begin{aligned} M_p^a(t) = & -\rho g \int_{\Gamma^b(t)} q(\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbf{G}^c(t)) \times \mathbf{N}d\gamma \\ & - \rho g \int_{\Gamma^b(t)} (\eta(t, X, Y) - h(X, Y))(\mathbf{X} - \mathbf{G}^c(t)) \times \mathbf{N}d\gamma \\ & - \int_{\Gamma(t)} p_d(t, \mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbf{G}^c(t)) \times \mathbf{N}d\gamma = \mathbf{M}_s^a(t) + M_\eta^a(t) + M_d^a(t) \end{aligned} \quad (42)$$

I termini *idrostatici* \mathbf{F}_h^a , e M_h^a sono chiaramente *conservativi*, dato che dipendono esclusivamente dalla posizione istantanea dell'imbarcazione; mentre \mathbf{F}_d^a , M_d^a , \mathbf{F}_η^a e M_η^a contengano anche dei termini

dissipativi dovuti sia alla resistenza di forma e resistenza d'onda già trattate in precedenza, sia dovuti alla propagazione ondosa secondaria indotta dai movimenti di 'accelerazione', 'affondamento' e 'beccheggio' dell'imbarcazione.

Esaminiamo qui più nel dettaglio il termine \mathbf{F}_h^a . Esso è un termine olonomo (la sua dipendenza in tempo è solo legata al moto dell'imbarcazione, essendo il pelo libero "congelato" nella sua configurazione di riferimento). Ricordando le leggi che legano la trasformazione del moto rigido, l'espressione (40) e la definizione delle funzioni q e Q in (34), possiamo ricondurci a un integrale sulla superficie di riferimento

$$\mathbf{F}_h^a(t) = -\rho g \int_{\tilde{\Gamma}} H[q(t, \mathbf{x})] \tilde{q}(t, \mathbf{x}) \mathcal{R}^T(\phi(t)) \mathbf{n} d\gamma.$$

La forza agli scalmi

Si considerino ora i termini relativi alle forze introdotte nel sistema dai vogatori. Durante una regata, sia il numero di colpi che la forza esercitata sul remo può variare considerabilmente. Indicheremo con r il *numero di colpi al minuto*, che, nella presente trattazione nella quale viene preso a riferimento la configurazione *quattro di coppia*, si ipotizza essere pari a 39.5. Si assume inoltre la costanza del valore massimo della forza esercitata. Misurazioni su remoergometri danno le espressioni seguenti per la forza su ogni coppia di scalmi:

$$f_x^{s^i} = F_x^{max} \sin^2\left(\frac{\pi t}{\tau_1}\right) \quad (43)$$

$$f_z^{s^i} = F_z^{max} \sin^2\left(\frac{\pi t}{\tau_1}\right). \quad (44)$$

Valori tipici sono $F_x^{max} = 1200 [N]$ e $F_z^{max} = 200 [N]$.

La stima del valore del valore τ_1 , che rappresenta la *fase attiva della remata*, è stata ricavata dall'interpolazione di dati ricavati da diverse fonti.

In particolare, la formula da qui usata è

$$\tau_1 = 0.00015625(r - 24)^2 - 0.008125(r - 24) + 0.8.$$

Per $r = 39.5$, questa equazione assume il valore di $\tau_1 = 0.711 [s]$, in accordo con il valore $\tau_1 = 0.7$ trovato da da Brearley e de Mestre dall'analisi di filmati di imbarcazioni con otto vogatori, e riportato in [?].

Di conseguenza si ricava il tempo di richiamo, pari a [?, ?]

$$\tau_2 = \frac{60 - \tau_1 r}{r}.$$

Le forze inerziali: leggi di movimento del vogatore

Nella scrittura del sistema compaiono i termini g^{v^i} , \dot{g}^{v^i} e \ddot{g}^{v^i} che descrivono la cinematica dei vogatori; l'espressione di questi è stata ricavata dall'osservazione diretta dell'atleta, considerando il baricentro fisso nel busto: sapendo che circa 2/3 del peso è distribuito in quest'ultimo, si può ritenere accettabile tale approssimazione. Le relazioni che forniremo sono espresse nel sistema di riferimento solidale,

ma con origine nella *alla posizione della pedana*, o, più precisamente, rispetto al piede del vogatore. Per evitare malintesi useremo il simbolo $\tilde{\cdot}$ per indicare le posizioni rispetto a questo sistema di riferimento. Va da se che le velocità e le accelerazioni non sono affette da questo cambio di origine.

Indicheremo con L^c la *corsa del carrello*, σ la *rotazione cinematica del vogatore*, L^g lo *spostamento del baricentro del vogatore relativamente all'anca (schienata)* e, infine, si indicherà ancora con τ_1 il tempo di *fase attiva della remata* e con $\tau_2 = T - \tau_1$ il tempo di richiamo. La remata è caratterizzata da r colpi al minuto e quindi da un periodo complessivo (in secondi) pari a $T = 60/r$.

L'ipotesi semplificativa è che il moto del baricentro del vogatore possa essere descritto da una ellisse[?] ruotata dell'angolo σ e che percorre nel periodo la distanza $L^c + L^g$ lungo l'asse x . Il semiasse inferiore della ellisse viene preso di lunghezza pari a L^g . Il centro della ellisse viene posto a $\tilde{x}_0 = (L^c + L^g)/2$ e $\tilde{z}_0 = 4L^g$. La formula generale della ellisse sarà dunque data da

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\theta) &= \tilde{x}_0 + a_x \cos(\theta) \cos(\sigma) - a_z \sin(\theta) \sin(\sigma) \\ \tilde{z}(\theta) &= \tilde{z}_0 + a_x \cos(\theta) \sin(\sigma) + a_z \sin(\theta) \cos(\sigma),\end{aligned}$$

dove $a_x = (L^c + L^g)/2$, $a_z = L^g$ e σ è stato assunto pari a $5/75$.

Si suppone poi che l'ellisse venga percorsa in *senso orario* a partire dal punto corrispondente a $\theta = -\pi$, da cui ha inizio la *fase attiva della remata*, di durata τ_1 . La *fase passiva*, anche detta di *recupero*, inizia nella posizione corrispondente a $\theta = 0$, per continuare fino alla fine del ciclo, in un tempo pari a $\tau_2 = T - \tau_1$. Chiaramente, il moto è periodico di periodo T

Le formule utilizzate in un singolo periodo $0 \leq t \leq T$ sono dunque le seguenti

$$\begin{aligned}\tilde{g}_x^v(t) &= \tilde{x}_0 + a_x \cos(\theta(t)) \cos(\sigma) - a_z \sin(\theta(t)) \sin(\sigma), \\ \tilde{g}_z^v(t) &= \tilde{z}_0 + a_x \cos(\theta(t)) \sin(\sigma) + a_z \sin(\theta(t)) \cos(\sigma), \\ \frac{d\tilde{g}_x^v}{dt}(t) &= [-a_x \sin(\theta(t)) \cos(\sigma) - a_z \cos(\theta(t)) \sin(\sigma)] \dot{\theta}, \\ \frac{d\tilde{g}_z^v}{dt}(t) &= [-a_x \sin(\theta(t)) \sin(\sigma) + a_z \cos(\theta(t)) \cos(\sigma)] \dot{\theta}, \\ \frac{d^2\tilde{g}_x^v}{dt^2}(t) &= [-a_x \cos(\theta(t)) \cos(\sigma) + a_z \sin(\theta(t)) \sin(\sigma)] \ddot{\theta}, \\ \frac{d^2\tilde{g}_z^v}{dt^2}(t) &= [-a_x \cos(\theta(t)) \sin(\sigma) - a_z \sin(\theta(t)) \cos(\sigma)] \ddot{\theta}.\end{aligned}$$

dove

$$0 \leq t \leq \tau_1 \rightarrow \begin{cases} \theta(t) = -\pi(\frac{t}{\tau_1} + 1) \\ \dot{\theta} = -\frac{\pi}{\tau_1} \\ \ddot{\theta} = \left(\frac{\pi}{\tau_1}\right)^2 \end{cases} ; \quad \tau_1 < t \leq T \rightarrow \begin{cases} \theta(t) = -\pi(\frac{t-\tau_1+\tau_2}{\tau_2} + 1) \\ \dot{\theta} = -\frac{\pi}{\tau_2} \\ \ddot{\theta} = \left(\frac{\pi}{\tau_2}\right)^2 \end{cases}$$

La traiettoria assieme alle velocità e alle accelerazioni corrispondenti sono riportati in Figura 10

2.6 Implementazione del modello dinamico

I sistemi dinamici qui discussi sono governati da sistemi di equazioni differenziali del second'ordine ai valori iniziali. Sono stati risolti trasformandoli in sistemi equivalenti del prim'ordine. Questo permette di utilizzare una larga varietà di schemi numerici sviluppati per problemi di questo tipo.

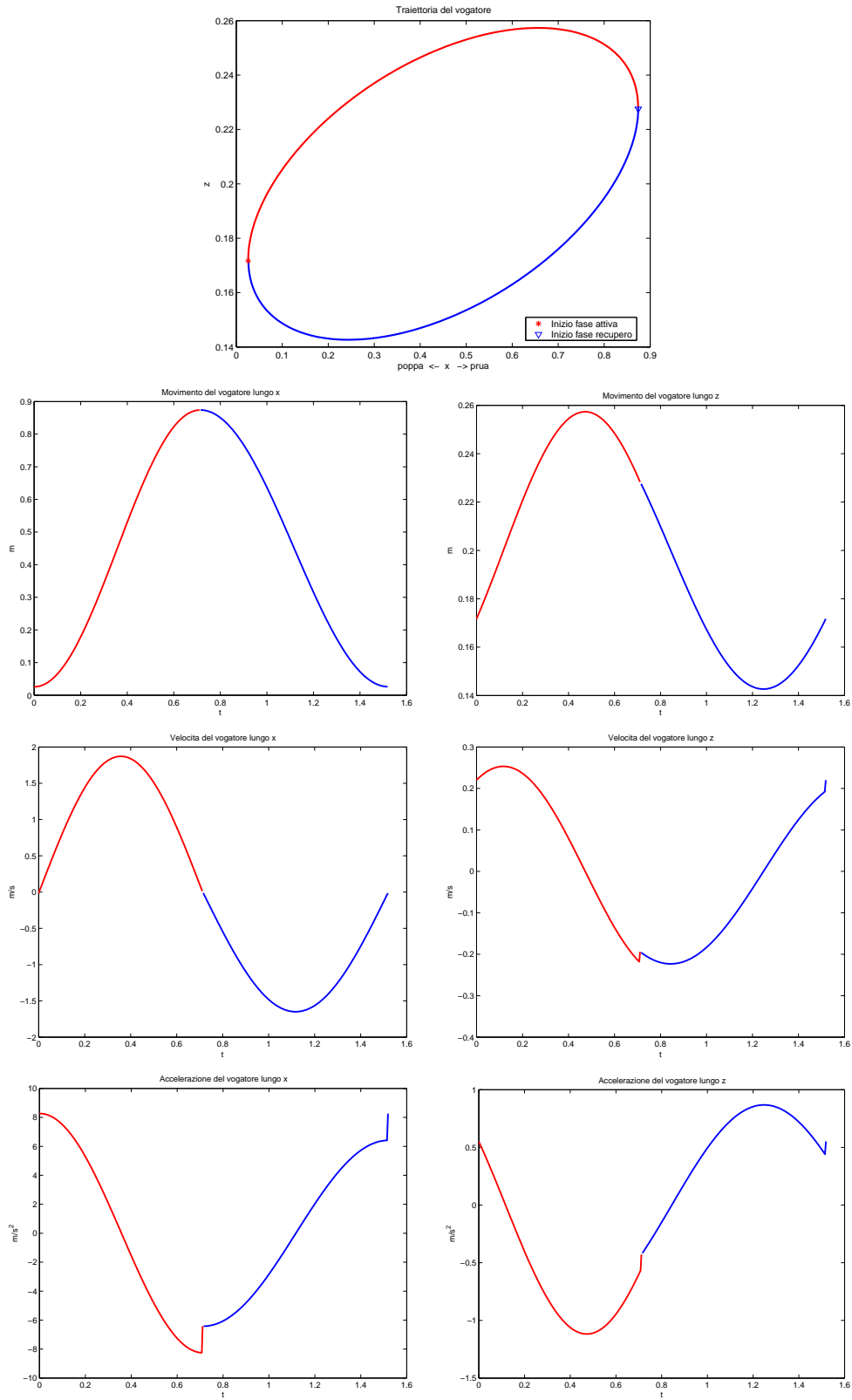


Figura 10: Grafico del movimento del busto del vogatore, con relative spostamenti, velocità e accelerazioni lungo x e z .

In particolare abbiamo utilizzato schemi numerici a disposizione sia nelle librerie ODEPACK[?], che nelle librerie GSL[?].

Il nostro problema verrà riscritto nella forma generale seguente

$$A(t, \mathbf{y}(t)) \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = \mathbf{B}(t, \mathbf{y}(t)), \quad t > 0 \quad (45)$$

con opportune condizioni iniziali $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$. Spesso librerie per la risoluzione di sistemi ODE del prim'ordine prevedono il sistema nella forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t)), \quad t > 0.$$

Per ricondurre (45) a tale forma occorre invertire la matrice \mathbf{A} . Infatti si può porre

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{B}(t, \mathbf{y}).$$

Notiamo che sia per il modello della dinamica del solo scafo che quello “scafo+vogatori” la matrice \mathbf{A} ha la seguente decomposizione a blocchi (di dimensione 3×3)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

La sua inversa è quindi

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Nota 10 Si noti che la matrice A è, per tutti i modelli qui considerati, simmetrica. Infatti anche per la il modello retto dalle equazioni (28) si ha che $L_{13} = L_{31}$ e $L_{23} = L_{32}$.

I modelli che prenderemo a riferimento sono quelli descritti rispettivamente nelle Sezioni 2.3 e 2.4. Rimane però da analizzare il contributo dei moti secondari, che abbiamo indicato precedentemente con \mathbf{D}^a e M_D^a e che non sono stati ancora dettagliati. In effetti ci si attende che tali termini forniscano due tipi di contributi. Il primo, proporzionale alla velocità, è un effetto propriamente dissipativo. Il secondo, proporzionale invece alla accelerazione rappresenta quello che viene comunemente chiamato *massa aggiunta*. Essendo proporzionale alla accelerazione va effettivamente a contribuire al membro di sinistra di (45), modificando la matrice A . Per esaminare la cose più in dettaglio presentiamo una metodologia per il calcolo di tali termini.

3 Calcolo delle interazione fluidodinamica tramite un modello a potenziale

L'interazione tra l'imbarcazione e l'acqua è un fenomeno complesso. Pur tuttavia, attraverso delle ipotesi ragionevoli è possibile ricondursi ad un modello che permette di calcolarne gli effetti sul sistema dinamico.

Abbiamo visto come sia possibile calcolare la forza ed i momenti idrostatici, ci concentriamo ora sugli effetti dinamici.

Considereremo solo i moti secondari, quindi non tratteremo qui gli effetti di resistenza che l'imbarcazione offre al moto medio, e faremo le ipotesi seguenti:

- La lunghezza delle onde generate dall'imbarcazione a causa dei moti secondari è comparabile con la lunghezza dell'imbarcazione stessa;
- L'ampiezza dell'onda generata è piccola rispetto alla lunghezza dell'imbarcazione.

Entrambe le ipotesi sono necessarie per la procedura di linearizzazione che illustreremo nel seguito. In particolare esse hanno come conseguenza che la “pendenza” dell'onda $\epsilon = \kappa A$, espressa come il prodotto del numero d'onda κ per l'ampiezza dell'onda A sia piccola.

Mentre la seconda ipotesi sembra ragionevole, la prima è più dubbia. Pur tuttavia, si ritiene che il metodo linearizzato possa fornire dei risultati accettabili anche quando solo l'ipotesi di onde di piccola ampiezza sia pienamente rispettata. D'altra parte il caso più generale può essere risolto solo con uno schema d'accoppiamento fluido-struttura non lineare e quindi molto costoso dal punto di vista dei tempi di calcolo. La trattazione dei prossimi paragrafi segue quanto indicato nel Capitolo 7 di [?].

Indicheremo con $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T = [G_X^c, G_Z^c, \phi]^T$ il vettore delle incognite del sistema dinamico, mentre $\mathcal{N} = [\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3]^T = [N_X, N_Z, -XN_Z + ZN_X]^T$ è il vettore della *normale generalizzata*, un utile artificio ideato per trattare formalmente nello stesso modo l'equazione del moto lineare e quella del moto angolare.

Si presuppone *un moto periodico* di periodo T e si indica con ω la *velocità* angolare di un moto armonico associato a tale periodo. Il valore $\omega = \frac{2\pi}{T}$ rappresenta la *velocità* angolare del modo fondamentale. Si ipotizza inoltre che il moto dell'acqua dovuto ai moti secondari sia *irrotazionale*, e quindi che la velocità dell'acqua \mathbf{u} dovuta ai moti secondari sia rappresentabile tramite un potenziale: $\mathbf{u} = \nabla\psi$, essendo $\psi = \psi(t, X, Y, Z)$ una funzione *solenoidale*, cioè soddisfacente $\Delta\psi = 0$ su Ω e $\forall t$, a causa della equazione di continuità.

Inoltre si suppone che la pressione dinamica p_d sia ricavabile dalla *equazione di Bernoulli generalizzata*, trascurando quindi *i termini non lineari* [?]. Si ha dunque

$$p_d = -\rho \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

La forza (e il momento) dovuti alla pressione dinamica, indicati come $\mathcal{F}^d = [F_X^d, F_Z^d, M_Y^d]$, si possono esprimere in forma compatta, grazie alla notazione adottata, come segue:

$$\mathcal{F} = \rho \int_{\Gamma_0^b} \frac{\partial\psi}{\partial t} \mathcal{N} d\gamma. \quad (46)$$

Questa relazione mette in luce l'altra ipotesi alla base della seguente derivazione: il considerare l'imbarcazione nella posizione di riferimento e pelo libero indisturbato. Si ignora quindi l'effetto della variazione di superficie bagnata dovuto al movimento del pelo libero causato dal moto stesso dell'imbarcazione.

Le forze in (46) hanno un effetto duplice sulla dinamica dell'imbarcazione: possono infatti essere scomposte come somma di due termini:

- *Termine di massa aggiunta*. Direttamente proporzionale alla accelerazione dell'imbarcazione, ha l'effetto di renderla apparentemente più “pesante”;
- *Termine di smorzamento*. Questo termine è invece proporzionale alla velocità dei moti secondari ed è il responsabile della dissipazione energetica legata a tali moti.

3.1 Calcolo del moto a potenziale

Si assume un moto periodico rappresentabile come una serie di moti armonici la cui velocità angolare è multipla di quella fondamentale. Possiamo quindi considerare un generico modo, di velocità angolare ω , e scrivere

$$v_s(t, \mathbf{X}) = \text{Re}(\Upsilon_s(\mathbf{X})e^{-i\omega t}), \quad s = 1, 2, 3, \quad \psi(t, \mathbf{X}) = \text{Re}(\Psi(\mathbf{X})e^{-i\omega t}), \quad (47)$$

dove $i = \sqrt{-1}$ mentre Υ_s e Ψ sono funzioni a valori complessi della sola variabile spaziale. Abbiamo indicato con $\text{Re}(z)$ la parte reale del numero complesso z , mentre $\text{Im}(z)$ ne è la parte immaginaria.

Il potenziale complesso Ψ può essere a sua volta espresso come composizione di tre fattori proporzionali alle componenti della velocità del moto secondario Υ_s , i.e

$$\Psi = \sum_{s=1}^3 \Upsilon_s \Psi_s. \quad (48)$$

Per illustrare come calcolare Ψ_s , consideriamo la Figura 11. Per semplicità abbiamo posto l'origine del sistema di riferimento in corrispondenza al baricentro nella configurazione di riferimento dell'imbarcazione. Il dominio Ω è un dominio illimitato formato dalla striscia tridimensionale $\mathbb{R}^2 \times [h, h - H]$, a cui è stata sottratta l'imbarcazione. Qui h indica la quota del pelo libero (indisturbato) e H l'altezza del canale (assunta costante). Il bordo del dominio Ω è quindi formato dalla superficie bagnata della canoa Γ_0^b , dal fondale Γ^f e dalla superficie libera Γ^w . Si suppone che i bordi laterali del campo di regata siano sufficientemente lontani da poterne trascurare gli effetti. Per il seguito si considererà anche il dominio limitato $\hat{\Omega}$, ottenuto intersecando Ω con un cilindro ad asse verticale passante per il baricentro dell'imbarcazione e di raggio $R \gg L$. Indicheremo con Σ la parte di $\partial\hat{\Omega}$ corrispondente alla superficie laterale del cilindro e con $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ la coordinata radiale.

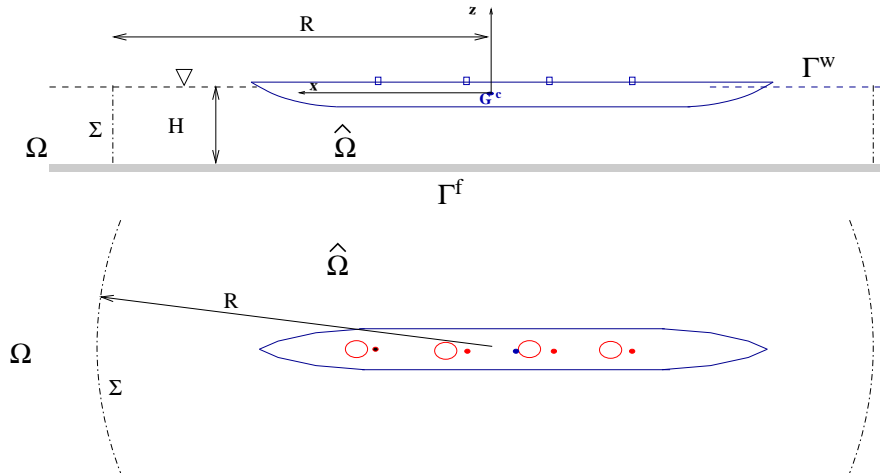


Figura 11: Dominio computazionale per il calcolo del potenziale.

La funzione Ψ_s soddisfa il problema differenziale seguente

$$-\Delta \Psi_s = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (49a)$$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial Z} = 0 \quad \text{su } \Gamma^f \quad (49b)$$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial Z} - \frac{\omega^2}{g} \Psi_s = 0 \quad \text{su } \Gamma^w \quad (49c)$$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial n} = \mathcal{N}_s \quad \text{su } \Gamma_0^b \quad (49d)$$

$$r^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - i\kappa \Psi_s \right) \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow \infty \quad (49e)$$

La condizione (49d) lega Ψ_s alla geometria della canoa. La condizione (49e) è la condizione di decadimento all'infinito. Qui κ è il numero d'onda che può essere calcolato come la sola radice reale della equazione di dispersione

$$k \tanh(kH) = \frac{\omega^2}{g}.$$

Nella ipotesi che $\kappa H = \frac{2\pi H}{\lambda} \gg 1$ (onde corte rispetto alla profondità del bacino) si può porre in prima approssimazione $\kappa = \frac{\omega^2}{g}$.

Chiaramente la formulazione (49) non è la più adatta per una risoluzione numerica, una alternativa è rappresentata dal formulare il problema in $\widehat{\Omega}$. Occorre però trovare il modo di trasformare la condizione di decadimento in una opportuna *condizione di radiazione* sulla interfaccia Σ . Questa tecnica è alla base dei metodi *localised* o *hybrid finite elements* [?, ?] e dei metodi *localised boundary element* [?, ?].

Il problema (49) viene rimpiazzato dal seguente,

$$-\Delta \Psi_s = 0 \quad \text{in } \widehat{\Omega} \quad (50a)$$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial Z} = 0 \quad \text{su } \widehat{\Gamma}^f \quad (50b)$$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial Z} - \frac{\omega^2}{g} \Psi_s = 0 \quad \text{su } \widehat{\Gamma}^w \quad (50c)$$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial n} = \mathcal{N}_s \quad \text{su } \Gamma_0^b \quad (50d)$$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial n} = -\mathcal{C}(\Psi_s) \quad \text{su } \Sigma \quad (50e)$$

Qui \mathcal{C} è la mappa *Dirichlet-Neumann* che associa alla traccia di Ψ_s su Σ la derivata normale $\frac{\partial \Psi_s}{\partial n}$ tale per cui la soluzione del problema (50) sia la restrizione a $\widehat{\Omega}$ della soluzione del problema (49).

Chiaramente tutta la difficoltà ora risiede nella costruzione dell'operatore \mathcal{C} . Vi sono due possibilità: o ricorrere, dove possibile, a formulazioni analitiche, disponibili tipicamente come serie di speciali autofunzioni, o approssimare \mathcal{C} risolvendo un problema differenziale molto simile a (49) sul dominio complementare $\Omega^* = \Omega \setminus \widehat{\Omega}$, che, a causa della geometria semplice di Ω^* , può essere risolto più facilmente del problema (49). Omettiamo maggiori dettagli rimandando alla letteratura citata.

Un modello ulteriormente semplificato

Se la superficie Σ è sufficientemente lontana dall'imbarcazione (i.e. $R \gg L$) allora le condizioni di

radiazione possono essere semplificate rimpiazzando (50e) con

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial n} = i\kappa \Psi_s. \quad (51)$$

In questo caso se scriviamo $\Psi_s = \alpha_s + i\beta_s$ essendo α_s e β_s due funzioni scalari in $\widehat{\Omega}$, si ha che (50) può essere riscritta nella forma

$$-\Delta \alpha_s = 0 \quad -\Delta \beta_s = 0 \quad \text{in } \widehat{\Omega} \quad (52a)$$

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial Z} = 0 \quad \frac{\partial \beta_s}{\partial Z} = 0 \quad \text{su } \widehat{\Gamma}^f \quad (52b)$$

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial Z} - \frac{\omega^2}{g} \alpha_s = 0 \quad \frac{\partial \beta_s}{\partial Z} - \frac{\omega^2}{g} \alpha_s = 0 \quad \text{su } \widehat{\Gamma}^w \quad (52c)$$

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial n} = \mathcal{N}_s \quad \frac{\partial \beta_s}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \Gamma_0^b \quad (52d)$$

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial n} = -\kappa \beta_s \quad \frac{\partial \beta_s}{\partial n} = \kappa \alpha_s \quad \text{su } \Sigma \quad (52e)$$

3.2 Massa aggiunta e matrice di smorzamento

Una volta calcolato Ψ_s , per $s = 1, 2, 3$ (per un dato ω) è possibile calcolare le seguenti quantità [?]:

Matrice di massa aggiunta. La matrice \mathcal{M} il cui termine generico è dato da

$$\mathcal{M}_{st} = \rho \int_{\Gamma_0^b} \text{Re}(\Psi_s) \mathcal{N}_t d\gamma, \quad s, t = 1, 2, 3 \quad (53)$$

È una matrice simmetrica definita positiva [?, Cap. 7].

Matrice di smorzamento. La matrice \mathcal{S} il cui termine generico è dato da

$$\mathcal{S}_{st} = \rho\omega \int_{\Gamma_0^b} \text{Im}(\Psi_s) \mathcal{N}_t d\gamma, \quad s, t = 1, 2, 3 \quad (54)$$

È una matrice simmetrica semidefinita positiva [?, Cap 7]. Si può anche calcolare con un integrale su Σ della forma

$$\mathcal{S}_{st} = \rho\omega\kappa \int_{\Sigma} \Psi_s \overline{\Psi}_t d\gamma, \quad s, t = 1, 2, 3 \quad (55)$$

essendo $\overline{\Psi}_t$ il complesso coniugato di Ψ_t . Si può mostrare che se le condizioni di radiazione sono rispettate esattamente il termine a destra di 55 è effettivamente un numero reale per tutti gli s e t .

3.3 Il sistema dinamico modificato

La massa aggiunta e il coefficiente di smorzamento calcolati dalla procedura precedentemente illustrata dipendono da ω . Dato che il moto armonico è la composizione di moti elementari a velocità angolari multiple della velocità angolare fondamentale, per valutare come i tali termini entrino nella equazione della dinamica dello scafo occorrerebbe trasformarla nel dominio della frequenza. A causa della non-linearità di molti dei termini questo è improponibile.

Si propone quindi di considerare il modo fondamentale come il principale modo di vibrazione e quindi utilizzare le matrici di massa e di smorzamento calcolate per $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

La modifica del sistema (45) per tenere conto della massa aggiunta e della matrice di smorzamento è la seguente:

$$\widehat{\mathbf{A}}(t) \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = \widehat{\mathbf{B}}^a(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{B}(t, \mathbf{y}(t)), \quad (56)$$

con

$$\widehat{A}_{st} = A_{st} + \mathcal{M}_{st} \quad \widehat{B}_s^a = - \sum_{i=1}^3 \mathcal{S}_{si} y_i \quad s, t = 1, 2, 3.$$

4 Un esempio

Si illustra un esempio di calcolo del sistema dinamico. Abbiamo preso a riferimento due configurazioni geometriche di canoa: la prima, che denoteremo *Stampo25* è la configurazione quattro-con di cui sono disponibili prove sperimentali svolte presso l'INSEAN, la seconda, che denotiamo *Stampo25-2*, ne rappresenta una lieve modifica.

Per entrambe le configurazioni sono state adottati i seguenti parametri

Sistema di riferimento assoluto (OXYZ)	X lungo l'asse dell'imbarcazione, da prua verso poppa. $Z=0$ coincidente con il piano superiore della canoa. $Y=0$ piano di simmetria.
Pelo libero di riferimento	$h=-0.11$ m. Pelo libero a 11 centimetri dal bordo superiore dell'imbarcazione.
Configurazione di riferimento dell'imbarcazione	Piano superiore orizzontale a $Z = 0$.

E' stato calcolato il baricentro del solo scafo, nella ipotesi che il peso sia uniformemente distribuito, ottenendo, nella configurazione di riferimento

<i>Stampo25</i>	<i>Stampo25-2</i>
$G_{X,0}^c = 6.383m, G_{Z,0}^c = -0.141m$	$G_{X,0}^c = 0.1472, G_{Z,0}^c = -0.135$

La differenza nella coordinata X è soprattutto dovuta al diverso posizionamento dell'origine degli assi nei due files di input della geometria. La differenza in Z , invece, è solo legata alla diversa geometria. La posizione del baricentro è chiaramente importante per la determinazione del momento lungo l'asse Y .

Per verificare come si comportano le forze idrostatiche al variare dell'assetto dell'imbarcazione le forze e momenti sono stati calcolati a partire da una triangolazione della superficie della imbarcazione, usando le tecniche illustrate in Sezione 2.5. Lo scafo e' stata quindi spostata verticalmente nell'intervallo $G_Z^c \in [G_{Z,0}^c - \delta G_z, G_{Z,0}^c + \delta G_z]$ con $\delta G_z = 0.11m$, e l'angolo di beccheggio Φ è stato variato nell'intervallo $\Phi \in [-2, +2]$ (gradi centigradi).

Le figure 12 e 13 illustrano la forze di galleggiamento F_Z e il momento M_Y dovute alle sole forze idrostatiche per le due configurazioni al variare di G_Z^c e Φ . La figura 14 mostra invece le differenze tra le due configurazioni.

Si può notare come la configurazione modificata opponga un momento idrostatico più elevato per Φ negativi rispetto al modello originale. Tale tendenza è più forte per $\Delta G_Z = G_Z^c - G_{Z,0}^c$

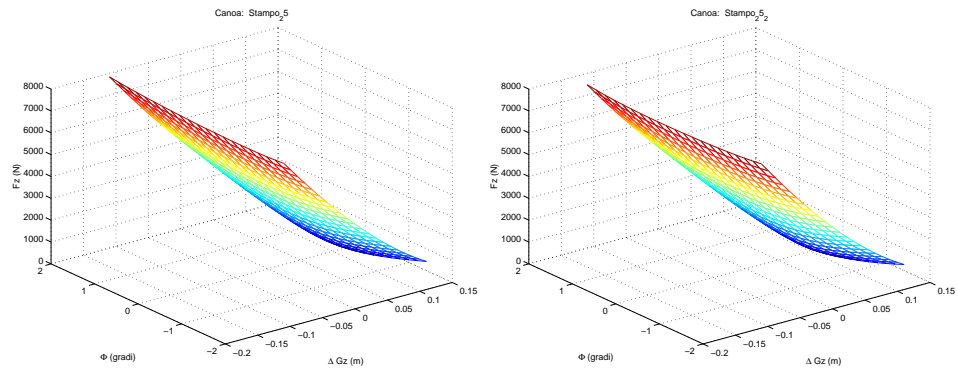


Figura 12: Risultante verticale F_Z per lo Stampo25 (sx) e lo stampo modificato Stampo25-2 (dx) per diversi valori di $\Delta G_Z = G_Z^c - G_{Z,0}^c$ e di Φ .

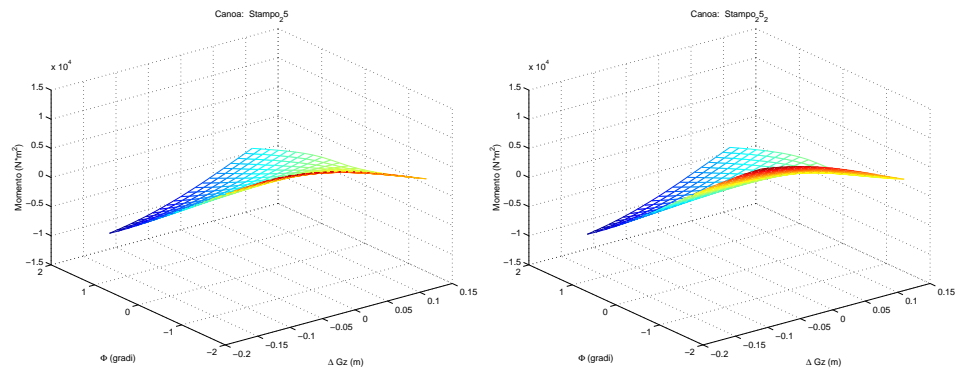


Figura 13: Momento M_Y per lo Stampo25 (sx) e lo stampo modificato Stampo25-2 (dx) a diversi valori di $\Delta G_Z = G_Z^c - G_{Z,0}^c$ e di Φ .

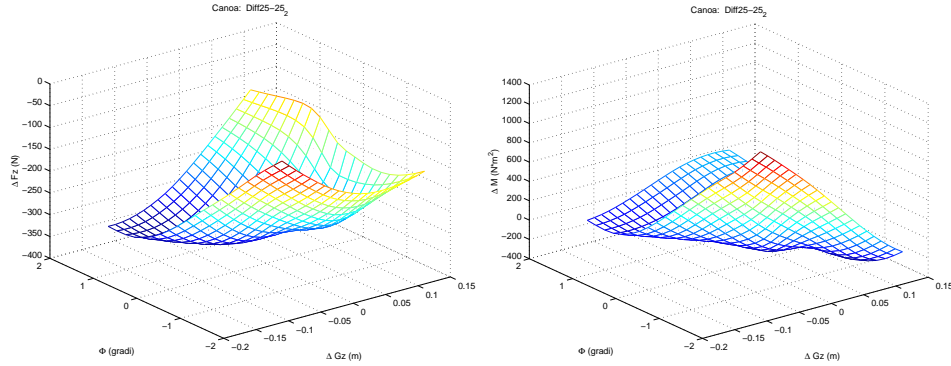


Figura 14: Differenza tra lo scafo Stampo25-2 e lo scafo Stampo25 nelle forze idrostatiche verticali F_Z per lo Stampo25 (sx) e il momento (dx), plottata per diversi valori di $\Delta G_Z = G_Z^c - G_{Z,0}^c$ e di Φ .

negativi, cioè quando l'imbarcazione è più "affondata". D'altra parte $\Delta F_Z = F_Z(\text{Stampo25-2}) - F_Z(\text{Stampo25})$ è sempre negativo, il che indica che lo stampo modificato avrà, a parità di peso, un affondamento maggiore. In effetti se, a $\Phi = 0$ si ha la situazione di equilibrio nella configurazione di riferimento per lo Stampo-25, tale condizione si raggiunge nello Stampo25-2 con l'imbarcazione affondata di quasi un centimetro in più (0.93 cm per l'esattezza). Per ogni stampo sono state mantenute costanti le distanze degli elementi costituenti l'imbarcazione (bracciolo, scalmiera, carrello) e di seguito se ne fa una breve descrizione.

Più precisamente, dalla prua si parte con 404cm e si trova il primo bracciolo, il secondo poi a 68cm da questo, quindi a 138 dal primo, e così via per quattro banchi. *Il banco*, cioè la posizione che occupa l'atleta, è compresa tra il bracciolo uno e tre, e via così dicendo. La numerazione dei braccioli va da uno a quanti necessari in funzione del numero di atleti a bordo. In pratica il primo bracciolo individua la partenza della posizione entro cui si muove l'atleta. Il secondo, detto *filo banco*, rappresenta la separazione tra la zona dove si siede l'atleta con quella dove è la pedana. Così dalla prua, dato la misura del primo bracciolo, si aggiunge 138cm per individuare il primo bracciolo del secondo atleta, il quarto in numerazione FISA, e così via.

Sul primo bracciolo si trova la trave in compressione, nel secondo la travatura che regge il carico verso il basso e la compressione verso il centro, il terzo sostiene quello che viene detto 5° tubo, in trazione. La distanza dal piano di simmetria del perno della scalmiera, che trasferisce il carico dal remo alla travatura reticolare componente i bracci portascalmiera di cui sopra, varia tra *coppia* e *punta*. Nella prima l'interasse tra i due bracci speculari rispetto al piano di simmetria della barca, vale 158cm. Nella punta la distanza tra detto piano e la scalmiera vale 84cm. Il remo si appoggia sulla scalmiera che giace su un piano posto a 210mm per la coppia e 180mm per la punta dal piano contenente il baricentro dell'imbarcazione più bracci.

Si sono quindi calcolate le matrici di massa aggiunta e di smorzamento, Per lo Stampo25 per esempio, \mathcal{S}_{st} vale

$$\begin{bmatrix} 1.609e + 00 & -6.033e - 01 & 1.137e + 02 \\ -6.033e - 01 & 1.108e + 03 & 1.045e + 02 \\ 1.137e + 02 & 1.045e + 02 & 9.387e + 03 \end{bmatrix}.$$

La figura 15 fornisce i confronti della dinamica dei suoi scafi con e senza la matrice di smorzamento.

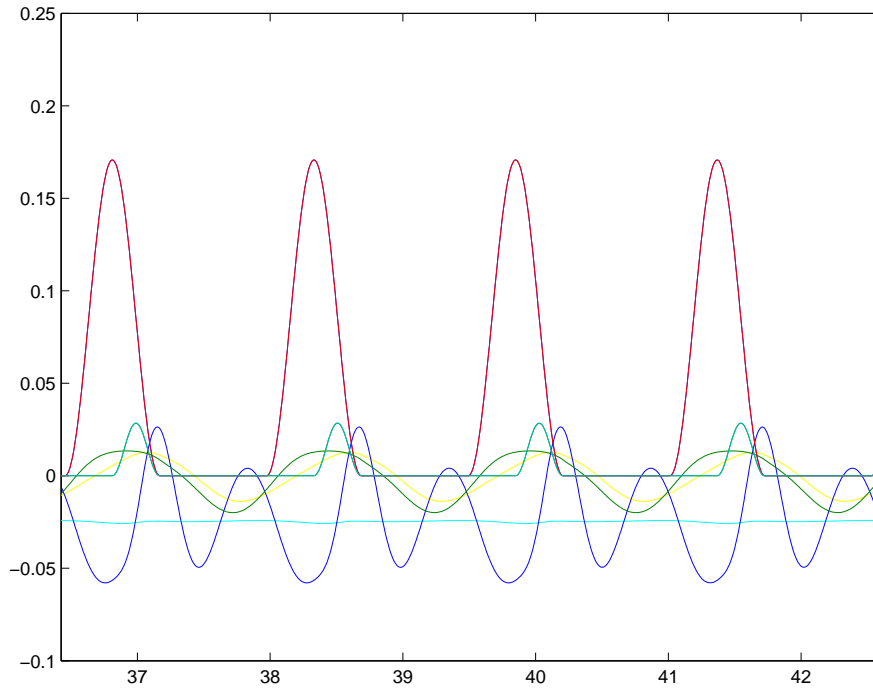


Figura 15: Confronto dinamiche con e senza matrice di smorzamento

5 Calcolo dell'interazione fluidodinamica tramite un modello Navier-Stokes a superficie libera

Un soluzione più accurata del problema in esame può essere ottenuta risolvendo il campo fluidodinamico attraverso un modello più complesso di quello a potenziale.

Controindicazioni legate alla soluzione di modelli più complessi vengono dall'inevitabile aggravio in termini di costo computazionale ed all'eventuale necessità di ricorrere ad un solutore commerciale, la quale obbliga a definire un opportuno modello di accoppiamento con il solutore della dinamica della *canoa*.

5.1 La soluzione del fluido ai volumi finiti

La soluzione del campo fluido attraverso il metodo dei volumi finiti può essere affrontata ricorrendo alle equazioni di Navier-Stokes nella loro formulazione in termini di grandezze medie (*Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*). Tali equazioni hanno la forma seguente:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(x) dV + \int_S \rho(x) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (57a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(x) \mathbf{v} dV + \int_S \rho(x) \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s} + \int_V \mathbf{f}_b dV \quad (57b)$$

il sistema appena scritto necessita dell'aggiunta di equazioni per introdurre la turbolenza e nel caso di problemi in presenza di superficie libera come il nostro di un opportuno metodo per il tracciamento di tale superficie.

Si propone la risoluzione della parte turbolenta attraverso un modello k-ε, governato dalle equazioni di trasporto per le quantità turbolente k ed ε

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho k dV + \int_S \rho k (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{q}_k \cdot d\mathbf{s} + \int_V (P + P_B - \rho \varepsilon) dV \quad (58a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \varepsilon dV + \int_S \rho \varepsilon (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{q}_\varepsilon \cdot d\mathbf{s} \\ + \int_V \left(C_1 P \frac{\varepsilon}{k} - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + C_3 \max(P_B, 0) \frac{\varepsilon}{k} - C_4 \rho \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV \end{aligned} \quad (58b)$$

Nell'approccio *VOF* (*Volume of Fluid*) si risolvono le equazioni sia per la parte sommersa che per quella emersa dello scafo. La separazione tra i due fluidi aria e acqua è data tramite una funzione c , detta frazione di volume, che convenzionalmente vale 1 nell'acqua e 0 nell'aria. L'equazione di trasporto per la frazione di volume c è data da

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} c = 0 \quad (59)$$

5.2 L'accoppiamento tra il fluido e la struttura

Si ha un problema di interazione fluido-struttura quando le configurazioni di equilibrio della struttura e del fluido nella quale è immersa sono funzioni una dell'altra. Il sistema di equazioni che governano il problema in esame risulta essere composto da:

- le equazioni di Navier-Stokes nella formulazioni incompressibile per fluidi bifase
- le equazioni associate al modello di turbolenza k-ε
- l'equazione di trasporto per la concentrazione che definisce la superficie libera:
- le equazioni di governo del sistema dinamico

le incognite del sistema sono:

- per la parte fluida le 3 componenti del vettore velocità, la pressione, le variabili associate al modello di turbolenza e la concentrazione:

$$u(x), \quad v(x), \quad w(x), \quad p(x), \quad k(x), \quad \varepsilon(x), \quad c(x)$$

- la posizione e la velocità del baricentro della canoa, cioè quello che abbiamo chiamato \mathbf{y} .

La soluzione è molto onerosa essendo il sistema completamente accoppiato. Una volta discretizzato può essere scritto in forma compatta adottando la formulazione ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) come:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{W}) + \mathbf{F}^c(\mathbf{W}, \mathbf{x}(\mathbf{y}), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{y})) = \mathbf{R}(\mathbf{W}(t)) \quad (60)$$

$$\mathbf{A} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{f}^{\text{ext}}(\mathbf{W}(\mathbf{x}))) \quad (61)$$

dove l'equazione (60) descrive il comportamento del fluido nella formulazione ALE mentre l'equazione (61) descrive il comportamento della struttura; \mathbf{x} rappresenta il vettore posizione (oppure spostamento a seconda dello contesto in cui è scritta l'equazione) dei punti della griglia mobile, \mathbf{W} rappresenta il vettore di stato del fluido, \mathbf{S} è l'operatore associato alla discretizzazione ai volumi finiti (oppure agli elementi finiti) delle equazioni del fluido, $\mathbf{F}^c = \mathbf{F} - \dot{\mathbf{x}}\mathbf{W}$ è il vettore dei flussi convettivi nella formulazione ALE, \mathbf{F} è il vettore dei flussi convettivi mentre \mathbf{R} è il vettore dei flussi diffusivi; \mathbf{u} è il vettore spostamento associato agli elementi che compongono la struttura \mathbf{M} e \mathbf{K} sono rispettivamente la matrice di massa e di rigidezza associate alla discretizzazione della struttura sottoposta al vettore forze esterne \mathbf{f}^{ext} .

La soluzione di tale sistema è difficile in quanto nella gran parte dei casi di interesse pratico sia il comportamento del fluido che quello della struttura sono infatti governati da modelli non lineari.

Per permettere la deformazione della struttura dovuta all'interazione con il sistema fluido è necessaria l'adozione di una griglia di calcolo che sia in grado di descrivere e seguire le variazioni di configurazione della struttura stessa. È prassi formulare il problema considerando una ulteriore equazione che descrive la dinamica della griglia di calcolo (*Formulazione a tre campi*).

In tale approccio il sistema da risolvere sarà così definito:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)\mathbf{W}(t)) + \mathbf{F}^c(\mathbf{W}(t), \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{R}(\mathbf{W}(t)) \quad (62)$$

$$\mathbf{A} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{W}(\mathbf{x}))) \quad (63)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + \tilde{\mathbf{D}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \tilde{\mathbf{K}} = 0 \quad (64)$$

$\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ e $\tilde{\mathbf{K}}$ prendono rispettivamente il nome di *pseudo-massa*, *pseudo-smorzamento* e *pseudo-rigidezza* associate al movimento della griglia.

Le equazioni di fluido e struttura sono solitamente accoppiate imponendo all'interfaccia l'equilibrio delle forze e l'uguaglianza delle velocità:

$$\sigma_s \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} + \sigma_f \cdot \mathbf{n} \quad su \quad \Gamma \quad (65)$$

$$u_s = u_f \quad su \quad \Gamma \quad (66)$$

dove il pedice s indica la struttura mentre il pedice f indica il fluido. La struttura e la griglia sono inoltre accoppiate tramite

$$x = u_s \quad su \quad \Gamma \quad (67)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u_s}{\partial t} \quad su \quad \Gamma \quad (68)$$

Il principio di conservazione dell'energia Il principio di conservazione dell'energia nella sua formulazione più generale afferma che nell'interazione tra due corpi A e B il lavoro che il corpo A esercita sul corpo B deve essere uguale al lavoro che B esercita su A

$$L_{A \rightarrow B}(t) = L_{B \rightarrow A}(t) \quad (69)$$

Analogamente si può formulare tale principio per interazioni tra fluido e struttura:

il lavoro compiuto dalla struttura sul fluido deve essere uguale al lavoro che il fluido compie sulla struttura per ogni istante di tempo

$$L_{F \rightarrow S}(t) = L_{S \rightarrow F}(t) \quad (70)$$

Se tale uguaglianza è identicamente verificata in campo continuo, non lo è necessariamente nella discretizzazione numerica del problema, dove la stessa condizione può essere scritta come

$$L_{F \rightarrow S}(t_n) = L_{S \rightarrow F}(t_n) \quad (71)$$

ovvero deve essere verificata ad ogni passo temporale.

La conservazione dell'energia in forma discreta è strettamente legata agli schemi numerici utilizzati.

La violazione di tale principio si riflette sulla stabilità della soluzione:

- se lo schema numerico sottrae energia al sistema esso sta introducendo un termine di smorzamento addizionale;
- se lo schema numerico introduce energia nel sistema esso sta fornendo un termine di eccitazione, compromettendo la stabilità.

Una soluzione semplificata al problema accoppiato consiste nel risolvere il problema completo attraverso il disaccoppiamento delle equazioni che costituiscono il sistema. Tale approccio viene solitamente indicato come *staggered*. L'applicazione più semplice di tale strategia consiste nel risolvere ad ogni passo temporale il fluido e la struttura una sola volta.

La convergenza di tale metodo non è però garantita a priori in quanto è evidente che adottando tale metodo si rinuncia ad avere ogni controllo sul raggiungimento o meno dello stato di equilibrio ad ogni passo temporale ed è praticamente impossibile controllare il bilancio energetico tra fluido e struttura. Tale problematica è evidenziata dal fatto che la posizione della struttura e la configurazione del fluido allo stesso passo temporale debbano essere calcolate utilizzando due campi di velocità diversi.

In questo modo però il costo computazionale si mantiene contenuto al punto da renderlo molto appetibile come soluzione di primo tentativo.

L'approccio può essere sintetizzato attraverso i seguenti passi:

1. soluzione delle equazioni del fluido con la struttura in posizione fissa;
2. recupero dei carichi sulla struttura dovuti al fluido;
3. applicazione di tali carichi alla struttura e determinazione della nuova configurazione di equilibrio;
4. aggiornamento della posizione della struttura;
5. avanzamento nel tempo $t_n \rightarrow t_{n+1}$.

5.3 Alcuni algoritmi *staggered*

Si propongono alcuni schemi di accoppiamento fluido struttura utilizzabili in un approccio *staggered* senza sottoiterazioni.

I metodi CSS e ISS sono tratti da [?] mentre il terzo metodo è suggerito in [?].

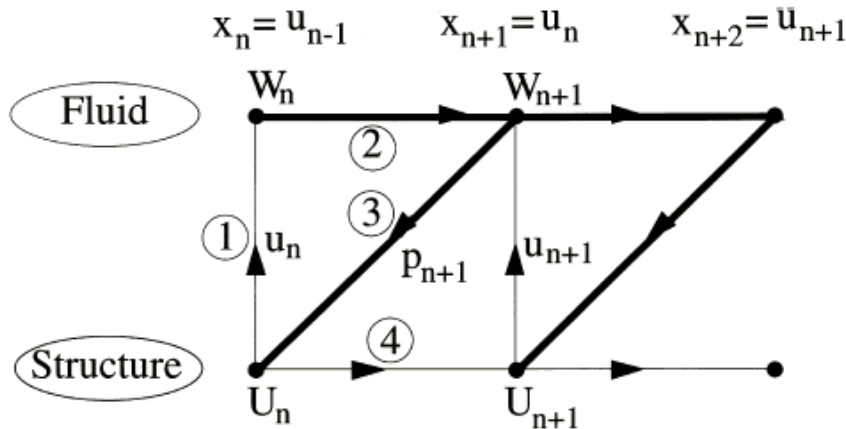


Figura 16: Schema staggered di tipo convenzionale (CSS).

Il metodo CSS Il metodo CSS (*Conventional Serial Staggered*) è il più semplice algoritmo di accoppiamento fluido-struttura. Lo schema del metodo è presentato in Figura 16, dove U indica il vettore di stato della struttura $[u, \dot{u}]^T$, W indica lo stato del fluido, p la pressione ed n è l'indice dell'istante temporale.

Come si può vedere tale schema è molto semplice:

1. si posizioni la struttura nella posizione U_n calcolata dal modello dinamico al passo n utilizzando per aggiornare la posizione della griglia l'equazione

$$x_{n+1} = u_n$$

dove con x si indica la posizione della griglia e con u la posizione della struttura;

2. si evolva il fluido dal passo n al passo $n + 1$, ottenendo la soluzione nel fluido W_{n+1} ;
3. si ricavino i carichi agenti sul contorno che rappresenta la struttura;
4. si risolva il sistema dinamico per evolvere la struttura dallo stato U_n allo stato U_{n+1} .

Il metodo ISS Il metodo ISS (*Improved Serial Staggered method*) costituisce una evoluzione del metodo CSS al fine di permettere una migliore conservazione dell'energia scambiata tra fluido e struttura ed in grado di verificare entrambe le equazioni di continuità all'interfaccia:

$$x = u_s \quad su \quad \Gamma \quad (72)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du_s}{dt} \quad su \quad \Gamma \quad (73)$$

In realtà è dimostrato in [?] che tale metodo non introduce errori nella predizione dell'energia scambiata all'interfaccia tra il fluido e la struttura.

Il metodo ISS può essere descritto nel seguente modo:

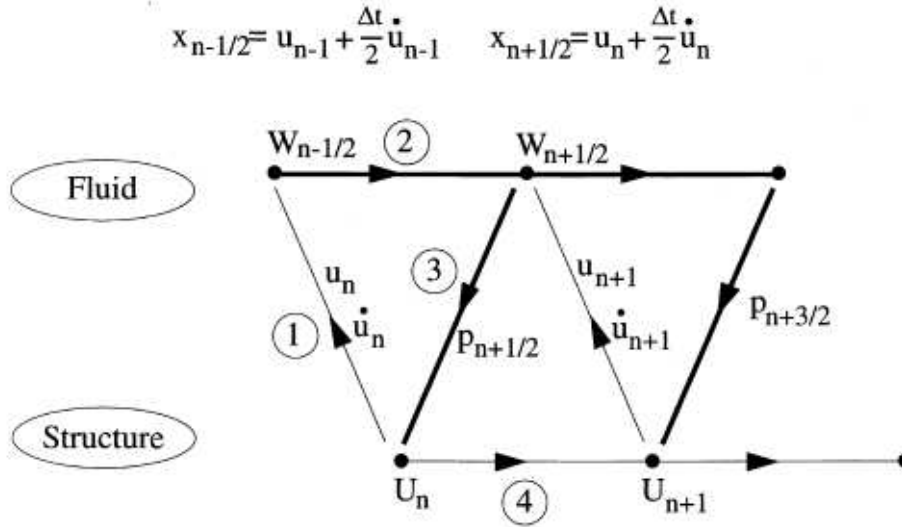


Figura 17: ISS: algoritmo *improved serial staggered*.

1. si fissino delle opportune condizioni iniziali W_0 , \mathbf{u}_0 e $\dot{\mathbf{u}}_0$ nel seguente modo:

$$x_{-\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_0 - \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_0 \quad \text{su } \Gamma$$

Per $n=1, \dots$

2. si fissi

$$\dot{x}_n = \dot{u}_n$$

dove \dot{x} è la velocità della griglia e \dot{u} è la velocità della struttura;

3. si aggiorni la griglia secondo l'equazione

$$x_{n+\frac{1}{2}} = x_{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \dot{x}_n$$

4. si risolva il problema nel fluido ottenendo $W_{n+1/2}$;
5. si ricostruisca il campo di pressione sul corpo, ricavando quindi i carichi;
6. si avanzi il sistema strutturale usando la regola del punto medio (la quale garantisce una accuratezza del secondo ordine).

La rappresentazione grafica dello schema ISS è riportata nella Figura 17.

L'applicazione del metodo al problema in esame richiede alcune modifiche. Infatti per poter evolvere il fluido dal passo $n - 1/2$ al passo $n + 1/2$ è necessario conoscere, oltre alla nuova posizione della griglia, la velocità del contorno e l'accelerazione orizzontale del sistema. Pertanto le grandezze per l'evoluzione del campo fluidodinamico vengono calcolate nel seguente modo:

$$x_{n+1/2} = x_{n-1/2} + \Delta t \dot{x}_n \quad (74)$$

$$\dot{x}_{n+1/2} = \dot{x}_{n-1/2} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{x}_{n-1/2} + \ddot{u}_n) \quad (75)$$

$$\ddot{x}_{n+1/2} = \frac{\dot{x}_{n+1/2} - \dot{x}_{n-1/2}}{\Delta t} \quad (76)$$

Dove con $\ddot{x}_{n-1/2}$ si indica l'accelerazione imposta al passo precedente e con \ddot{u}_n si indica l'accelerazione risultante al passo precedente in uscita dal sistema dinamico.

Una volta risolte le equazioni del fluido al passo $n + 1/2$ si conoscono le forze sulla struttura (ovvero la funzione $f_{n+1/2}$); pertanto è possibile calcolare la nuova posizione della struttura come:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{x}_{n+1/2} \quad (77)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t f_{n+1/2} \quad (78)$$

Un metodo alternativo Un ulteriore schema di accoppiamento tra fluido e struttura è il seguente:

1. si consideri la soluzione del sistema dinamico che governa la struttura al passo n . Tale soluzione implica la disponibilità dell'accelerazione \mathbf{a}_n , della velocità \mathbf{v}_n e della posizione \mathbf{x}_n del baricentro della struttura

2. si effettui una estrapolazione dell'accelerazione al passo $n+1$ attraverso la relazione del secondo ordine

$$\mathbf{a}_{n+1} = \frac{3}{2}\mathbf{a}_n - \frac{1}{2}\mathbf{a}_{n-1} \quad (79)$$

3. da tale accelerazione si ricavino velocità e spostamento come

$$v_{n+1} = v_n + \frac{\delta t}{2}(a_{n+1} - a_n) \quad (80)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\delta t}{2}(v_{n+1} - v_n) \quad (81)$$

4. si applichi tale spostamento alla struttura e si risolvano le equazioni del fluido al passo $n + 1$. Si calcolino i carichi idrodinamici agenti sulla struttura

5. si determinino i nuovi carichi da applicare alla struttura attraverso l'extrapolazione

$$\tilde{F}_{n+1} = 2F_{n+1} - F_n \quad (82)$$

6. si risolva la struttura applicando i carichi fluidodinamici ricavati attraverso l'extrapolazione proposta al passo precedente.

È dimostrato in [?] che l'extrapolazione proposta al passo 5 è necessaria per garantire la conservazione dell'energia all'interfaccia tra fluido e struttura.

Il vincolo principale alla scelta del passo temporale deriva dalla necessità di risolvere accuratamente le equazioni del fluido.

5.4 L'accoppiamento fluido struttura adottato

Si tratta ora di determinare il modo più conveniente per integrare i due solutori a disposizione:

- il solutore del sistema fluido
- il solutore del sistema struttura

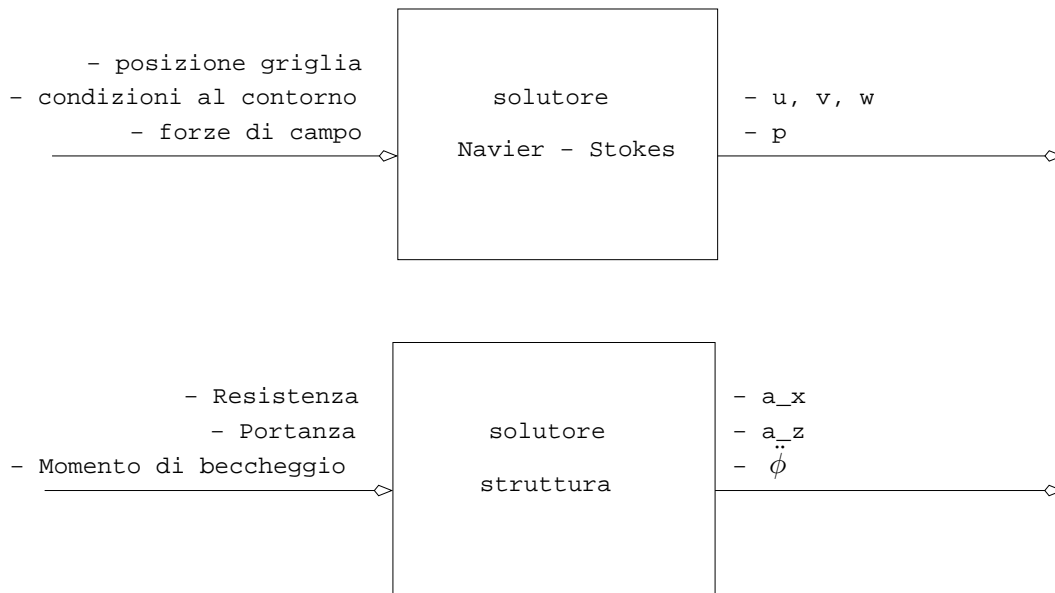


Figura 18: Ingressi e uscite associate ai sistemi *fluidico* e *strutturale*.

Nell'approccio *staggered* il problema completo può essere scomposto in due blocchi (il fluido e la struttura) comunicanti attraverso un algoritmo iterativo; ciascuno dei due blocchi è raffigurato in Figura 18 mettendo in evidenza gli **ingressi** di cui necessita e le **uscite** che produce.

Il solutore N-S necessita in ingresso di

- posizione della struttura;
- condizioni al contorno;
- forze di campo

e restituisce

- il vettore velocità;
- la pressione

all'interno di ogni volume di controllo.

Il sistema dinamico che risolve la struttura necessita in ingresso di

- risultante delle forze in direzione x agente sullo scafo;
- risultante delle forze in direzione z agente sullo scafo;
- momento attorno all'asse di beccheggio dello scafo

Di contro esso restituisce

- accelerazione dello scafo in direzione x ;
- accelerazione dello scafo in direzione z ;
- accelerazione angolare attorno all'asse di beccheggio dello scafo.

Si è detto che l'approccio scelto per il movimento della griglia di calcolo prevede un trattamento diverso tra il grado di libertà longitudinale ed i gradi di libertà di beccheggio e affondamento.

Tale particolarità impone la necessità di disporre di informazioni sostanzialmente differenti nei due casi:

- spostamento e velocità per i gradi di libertà di beccheggio e affondamento;
- accelerazione per il grado di libertà longitudinale.

Alla luce di tali osservazioni lo schema a blocchi che descrive l'interazione tra i due codici è presentato in Figura 19.

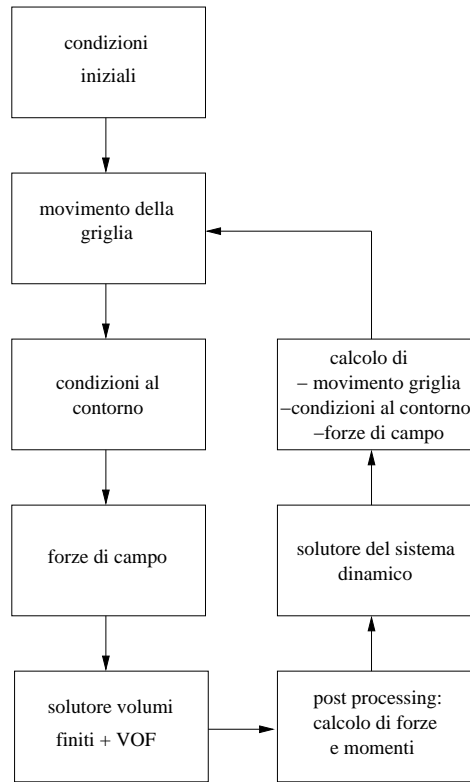


Figura 19: Schema di accoppiamento adottato.

La Figure 20 e 21 riportano infine un risultato ottenuto applicando la metodologia proposta con uno schema di accoppiamento di tipo CSS. In particolare si presenta l'andamento temporale dell'assetto dello scafo (z , \dot{z} , ϕ , $\dot{\phi}$) durante il ciclo di remata (periodo pari a 1.5s, a partire da 2s). Altri risultati significativi sono presentati e discussi in [?].

Lista dei simboli usati

- $\ddot{\mathbf{G}}^c$ Accelerazione del baricentro dello scafo.
- $\ddot{\mathbf{G}}^v$ Accelerazione del vogatore (generica).
- $\ddot{\mathbf{G}}^{v^i}$ Accelerazione dell' i -esimo vogatore.
- \mathbf{b}^v Baricentro dell'insieme dei vogatori, nel sistema relativo.
- C_{dX} Coefficiente di resistenza di forma.

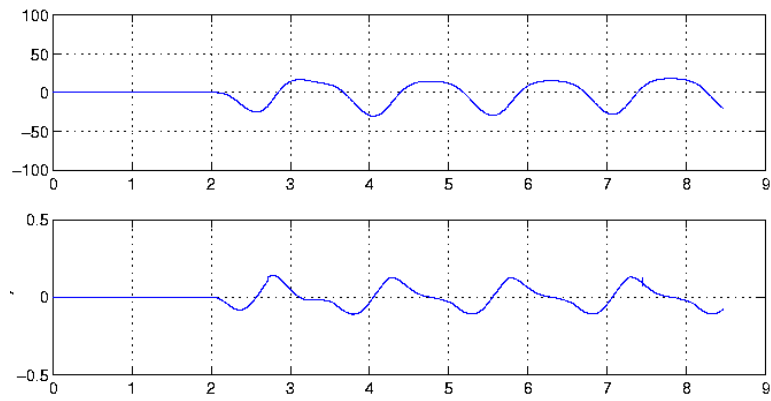


Figura 20: Andamento temporale del grado di libertà verticale z, \dot{z}

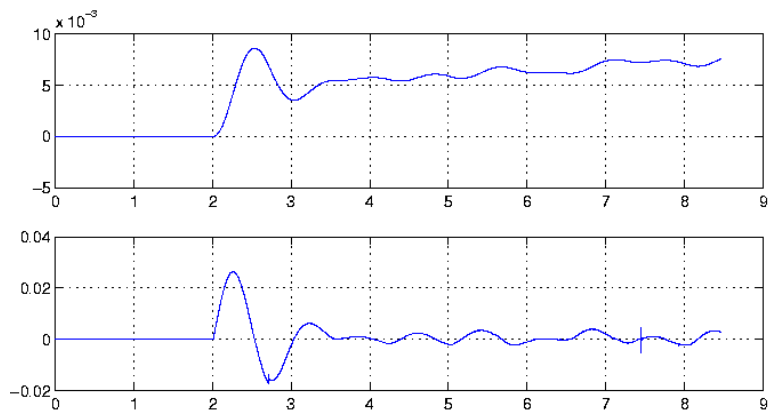


Figura 21: Andamento temporale del grado di libertà di beccheggio $\phi, \dot{\phi}$

- C_{dw} Coefficiente di resistenza d'onda.
- C_f Coefficiente di resistenza viscosa.
- \mathcal{F}^c Risultante della forza ai carrelli.
- \mathcal{F}^p Risultante della forza alle pedane.
- \mathcal{F}^s Risultante della forza agli scalmi.
- \mathbf{G}^c Baricentro dello scafo.
- \mathbf{G}^v Baricentro del vogatore (generico).
- \mathbf{G}^{v^i} Baricentro dell' i -esimo vogatore.
- I_Y^c Inerzia angolare dello scafo, rispetto all'asse Y .
- L^c Corsa del carrello.
- L^g Corsa orizzontale baricentro del vogatore.
- L Lunghezza dello scafo.
- M^c Massa dello scafo.
- M Massa totale $M = M^c + M_t^v$.
- M^v Massa del vogatore (generico).
- M^{v^i} Massa del vogatore i -esimo.
- M_t^v Massa totale dei vogatori. $M_t^v = nM^v$.
- \mathcal{N} $\mathcal{N} = [\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3]^T = [N_X, N_Z, -XN_Z + ZN_X]^T$.
- Ψ Potenziale velocità.
- \mathcal{R} Matrice di rotazione.
- R^a Resistenza idraulica.
- σ Rapporto di rotazione cinematica vogatore.
- S^a Spinta idraulica.
- $\Gamma(t)$ Superficie esterna dello scafo.
- Γ_Z^b Proiezione sul piano XY della superficie bagnata.
- $\Gamma^b(t)$ Superficie esterna bagnata dello scafo al tempo t .
- Γ_0^b Superficie esterna bagnata nella configurazione di riferimento dello scafo.
- $\tilde{\Gamma}_t^b$ Superficie esterna bagnata di dello scafo al tempo t (in coordinate locali).

- $\tilde{\Gamma}_0^b$ Superficie esterna bagnata nella configurazione di riferimento dello scafo (in coordinate locali).
- S Dominio nel piano parametrico contro-immagine di $\tilde{\Gamma}_t^b$.
- $\tilde{\Gamma}$ Superficie esterna di riferimento dello scafo.
- Γ_X^b Sezione massima dello scafo immerso.
- T Periodo.
- $\dot{\mathbf{G}}^c$ Velocità del baricentro dello scafo.
- $\dot{\mathbf{G}}^v$ Velocità del vogatore (generica).
- $\dot{\mathbf{G}}^{v^i}$ Velocità dell' i -esimo vogatore.
- $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T = [G_X^c, G_Z^c, \phi]^T$.
- Q Quota di profondità dal pelo libero corrente nel sistema di coordinate assoluto.
- \tilde{Q} Quota di profondità dal pelo libero corrente nel sistema di coordinate solidale allo scafo.
- ϕ Angolo di beccheggio.
- \mathcal{M} Matrice di massa aggiunta.
- $\ddot{\mathbf{g}}^v$ Accelerazione nel sistema relativo del vogatore (generica).
- $\boldsymbol{\omega}$ Velocità angolare dello scafo $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{e}_Y$.
- $\ddot{\mathbf{g}}^{v^i}$ Accelerazione nel sistema relativo dell' i -esimo vogatore.
- \mathbf{c} Posizione del carrello (generico).
- \mathbf{c}^i Posizione dell' i -esimo carrello.
- ρ Densità dell'acqua.
- r Numero di colpi al minuto (inverso del periodo).
- \mathbf{F}^a Risultante delle forze applicate al baricentro dello scafo dovute alla azione idrodinamica.
- \mathbf{f}^b Forza esercitata sul braccio del vogatore (generica).
- \mathbf{f}^{b^i} Forza esercitata sul braccio dell' i -esimo vogatore.
- \mathbf{f}^c Forza esercitata all' i -esimo carrello dal vogatore sullo scafo.
- \mathbf{f}^{c^i} Forza esercitata al carrello dal vogatore sullo scafo.
- \mathbf{f}^p Forza esercitata alla i -esima pedana dal vogatore sullo scafo.
- \mathbf{f}^{p^i} Forza esercitata alla pedana dal vogatore sullo scafo.
- \mathbf{f}^r Forza esercitata dall'acqua sulla pala del remo.

- \mathbf{f}^{v^i} Forza esercitata dall'acqua sulla pala del remo i -esimo.
- \mathbf{f}^s Forza allo scalmò esercitata sullo scafo.
- \mathbf{f}^{s^i} Forza allo scalmò i -esimo.
- \mathbf{g} Accelerazione di gravità $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_Z$.
- \mathbf{g}^v Baricentro del vogatore nel sistema solidale.
- \mathbf{g}^{v^i} Baricentro dell' i -esimo vogatore nel sistema solidale.
- κ Numero d'onda.
- λ Lunghezza d'onda.
- \mathbf{M}^a Momento risultante rispetto al baricentro dello scafo dovuto alla azione idrodinamica:
 $\mathbf{M}^a = M^a\mathbf{e}_Y$.
- M^a Componente lungo Y di \mathbf{M}^a .
- \mathcal{O} Matrice di rotazione: $\mathcal{O}(\phi) = \frac{d}{d\phi}\mathcal{R}^T(\phi)$.
- \mathbf{p} Posizione della pedana (generica).
- \mathbf{p}^i Posizione della pedana i -esima.
- ψ Potenziale velocità.
- h_0 Quota del pelo libero indisturbato rispetto al fondo dello scafo.
- h Quota del pelo libero di riferimento, rispetto al fondo dello scafo.
- \mathbf{s} Posizione dello scalmò (generico).
- \mathbf{s}^i Posizione dell' i -esimo scalmò.
- \mathcal{S} Matrice di massa smorzamento.
- τ_1 Periodo della fase attiva di remata.
- τ_2 Tempo di richiamo.
- \mathbf{u} Velocità dell'acqua dovuta ai moti secondari.
- \mathbf{V} Velocità lineare dello scafo.
- $\dot{\mathbf{g}}^v$ Velocità del vogatore nel sistema relativo (generica).
- $\dot{\mathbf{g}}^{v^i}$ Velocità dell' i -esimo vogatore nel sistema relativo.
- \mathbf{y} Vettore delle incognite $\mathbf{y} = (\dot{G}_X^c, \dot{G}_Y^c, \dot{\phi}, G_X^c, G_Y^c, \phi)$.
- q Quota di profondità dal pelo libero di riferimento, nel sistema di coordinate assoluto.
- \tilde{q} Quota di profondità dal pelo libero di riferimento, nel sistema solidale allo scafo.

Elenco delle figure

1	Moti “secondari” indotti dal movimento dei vogatori. Da sinistra a destra: moti di accelerazione orizzontale, moto di affondamento e di beccheggio.	2
2	Schema di imbarcazione da canottaggio (4 rematori) e sistema di riferimento assoluto	4
3	Schema di imbarcazione da canottaggio e sistemi di riferimento. Il sistema di riferimento geometrico e quello relativo differiscono solo nello spostamento dell’origine: il sistema relativo è centrato nel baricentro dello scafo, il sistema geometrico nel punto di poppa P	5
4	Schema del sistema dinamico “vogatore” con le forze agenti.	8
5	Schema del sistema di forze agenti sul remo.	9
6	Schema del sistema di forze agenti sullo scafo isolato.	10
7	Dettaglio delle forze agenti sulla pedana e sul carrello.	11
8	Per ragioni di praticità, la legge del movimento dei vogatori $\mathbf{g}^v(t)$ viene fornita in un sistema di riferimento con origine nel piede del vogatore, qui indicato con (x^p, z^p) . Per l’uso nel modello dinamico, però viene trasformata nel sistema di riferimento relativo, che ha origine nel baricentro dello scafo.	11
9	Diversi tipi di “pelo libero”. h^0 è il pelo libero indisturbato, a quota costante; $h = h(X, Y)$ è il pelo libero di riferimento, stazionario rispetto al sistema di riferimento assoluto scelto e dipendente dalla velocità media; $\eta = \eta(t, X, Y)$ è il pelo libero corrente, che dipende dal movimento effettivo dello scafo (e quindi anche dai moti secondari).	16
10	Grafico del movimento del busto del vogatore, con relative spostamenti, velocità e accelerazioni lungo x e z	20
11	Dominio computazionale per il calcolo del potenziale.	23
12	Risultante verticale F_Z per lo Stampo25 (sx) e lo stampo modificato Stampo25-2 (dx) per diversi valori di $\Delta G_Z = G_Z^c - G_{Z,0}^c$ e di Φ	27
13	Momento M_Y per lo Stampo25 (sx) e lo stampo modificato Stampo25-2 (dx) a diversi valori di $\Delta G_Z = G_Z^c - G_{Z,0}^c$ e di Φ	27
14	Differenza tra lo scafo Stampo25-2 e lo scafo Stampo25 nelle forze idrostatiche verticali F_Z per lo Stampo25 (sx) e il momento (dx), plottata per diversi valori di $\Delta G_Z = G_Z^c - G_{Z,0}^c$ e di Φ	28
15	Confronto dinamiche con e senza matrice di smorzamento	29
16	Schema staggered di tipo convenzionale (CSS).	33
17	ISS: algoritmo <i>improved serial staggered</i>	34
18	Ingressi e uscite associate ai sistemi <i>fluidico</i> e <i>strutturale</i>	36
19	Schema di accoppiamento adottato.	37
20	Andamento temporale del grado di libertà verticale z, \dot{z}	38
21	Andamento temporale del grado di libertà di beccheggio $\phi, \dot{\phi}$	38

