

MOX–Relazione Tecnica Interna

Modellazione Bidimensionale e Simulazione Numerica del Funzionamento di una Candeletta di Preriscaldamento

L. FORMAGGIA, S. MICHELETTI, B. SAVINI

MOX, Dipartimento di Matematica "F. Brioschi"
Politecnico di Milano, Via Bonardi 9 - 20133 Milano (Italy)

mox@mate.polimi.it

<http://mox.polimi.it>

Modellazione Bidimensionale e Simulazione Numerica del Funzionamento di una Candeletta di Preriscaldamento

L. Formaggia, S. Micheletti, B. Savini

26 Settembre 2003. Edizione:1.0

Relazione Tecnica a seguito Contratto di Ricerca

*Modellazione Bidimensionale e Simulazione Numerica del Funzionamento di una
Candeletta di Preriscaldamento*

con

Federal Mogul Ignition S.r.l.
Via della Scienza 6/8, 41012 Carpi (Modena), Italy

1 Introduzione e Motivazioni

Oggetto del Contratto di Consulenza è lo studio del funzionamento di una candeletta di preriscaldamento per motori Diesel, tramite un modello bidimensionale tempo-dipendente che consenta di gestire diverse geometrie e di generalizzare il modello monodimensionale sviluppato nel corso del precedente contratto.

Il modello monodimensionale aveva evidenziato la necessità di modellare con più accuratezza la geometria della punta per poter descrivere con più efficacia gli scambi di calore che vi avvengono. Altri punti delicati erano risultati essere la modellazione degli scambi convettivi, in particolare nella camerina, nonché la scelta delle condizioni al contorno. L'incertezza sulle caratteristiche termiche dei materiali ha portato quindi alla realizzazione di diverse prove sperimentali, con diverse geometrie e tensioni di alimentazione. Le prove hanno consentito di avere a disposizione una casistica più ampia di condizioni operative con cui condurre un'analisi.

Al fine di rendere il prodotto software utile nella fase di progetto da parte di *Federal Mogul S.r.l.*, si è cercato di rendere il codice (sviluppato in ambiente MATLAB¹) il più possibile versatile nei confronti della geometria in modo da poter gestire forme più o meno sofisticate e dettagliate senza imporre dei limiti. L'interfaccia, realizzata come documento EXCEL², consente quindi di inserire i dati geometrici e le caratteristiche dei materiali in modo più o meno dettagliato a discrezione dell'utente.

Nel presente contratto è stato inoltre ampliato il modello monodimensionale aggiungendo dei termini al contorno che tenessero conto dello scambio di calore dovuto ai moti convettivi.

2 Modello Matematico

Il modello matematico è costituito da un sistema elettrotermico di due equazioni:

- una equazione differenziale alle derivate parziali rispetto al tempo t e alle coordinate spaziali x, r , rispettivamente nella direzione assiale e radiale della candeletta, nella forma dell'equazione del calore per la temperatura T ;
- la legge di Ohm per il conduttore elettrico inserito nella candeletta e costituito da un filo di forma elicoidale.

L'equazione del calore descrive la distribuzione spaziale della temperatura nel dominio di calcolo. La legge di Ohm è utilizzata per il calcolo del calore prodotto per effetto Joule dalla resistenza, che di fatto rappresenta la forzante dell'equazione del calore, e viene introdotta nella formulazione debole del problema tramite l'imposizione delle condizioni al contorno.

¹MATLAB è un marchio registrato della MathWorks Inc.

²EXCEL è un marchio registrato della Microsoft Corporation

Dalle conclusioni del modello monodimensionale era emersa la difficoltà dell'imposizione delle condizioni al contorno sia per quanto riguarda la parte della candeletta verso lo stelo sia per la parte in corrispondenza della camerina. Il problema consisteva nel modellare in modo opportuno lo scambio di calore (soprattutto per la componente convettiva), dal momento che non è nota la temperatura della camerina e non è possibile tener conto dell'inerzia termica dei corpi che circondano la candela.

Al fine di superare questa incertezza, si è deciso di includere nel dominio di calcolo sia il corpo della camerina che il corpo che la circonda. Operativamente infatti la candela è inserita nel motore, mentre nel caso di caratterizzazione la candela è inclusa in una boccola, tipicamente un corpo cilindrico. In entrambi i casi la temperatura sulla superficie esterna di questi corpi si può considerare nota perché, nel caso della boccola sarà la temperatura imposta dal dissipatore di calore che la circonda (in genere 20°C), mentre nel caso del motore si può ragionevolmente supporre attorno ai 120°C, oppure si può imporre un profilo di temperatura monitorando ad esempio la temperatura dell'olio.

Ai fini del calcolo è necessario quindi avere informazioni circa le caratteristiche termiche (conducibilità, capacità, emissività) anche di questi due corpi, che sono in genere costituiti da acciai e leghe di alluminio.

Il dominio computazionale (Fig. 1) comprende anche delle porzioni d'aria che si trovano tra i vari corpi. Le caratteristiche termiche di questi sottodomini vengono calcolate all'interno del codice tramite un'analisi dei flussi di calore scambiati.

Per la presentazione del modello matematico e per la sua approssimazione numerica implementata nel codice di calcolo Glow2D, si rimanda all'Appendice.

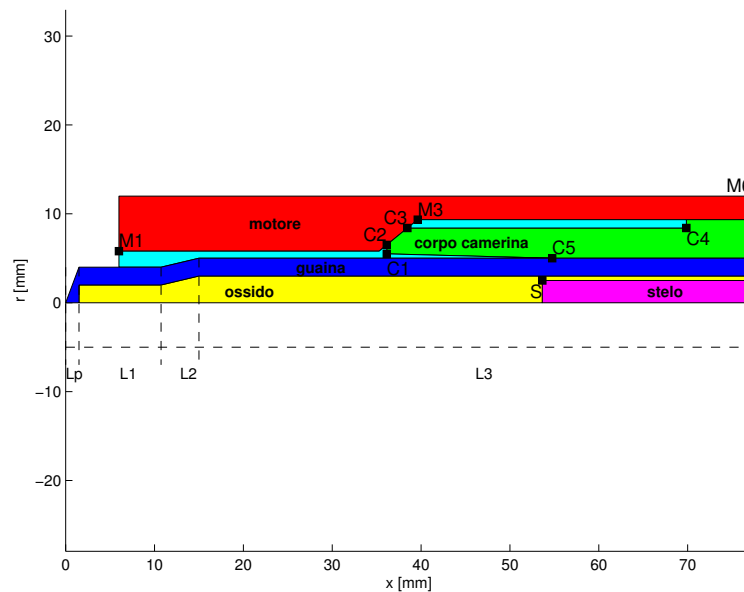


Figura 1: Schema del dominio di calcolo

Un esempio di griglia è il seguente (Fig. 2):

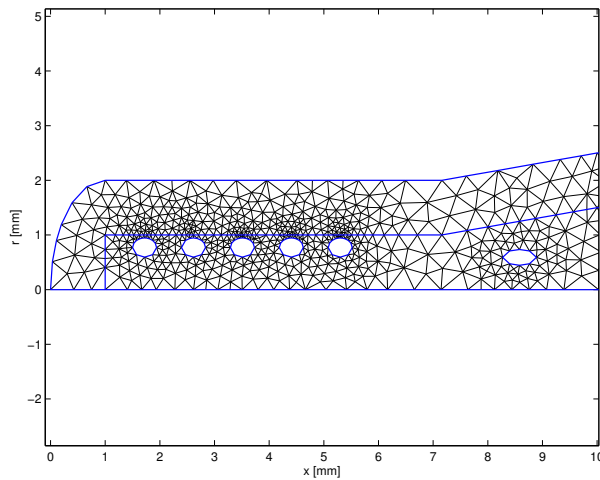


Figura 2: Dettaglio di griglia di calcolo

Alcune delle ipotesi alla base del modello sono le seguenti:

1. Il dominio è considerato assialsimmetrico. Questo introduce un'approssimazione nella descrizione della spirale la cui geometria non presenta simmetrie. In particolare ciò comporta che la geometria elicoidale dell'elemento conduttore sia modellata da un insieme di geometrie toroidali.
2. La conduzione termica nella spira è ritenuta trascurabile;
3. La dissipazione di calore sulla superficie esterna della candeletta avviene per convezione e per irraggiamento secondo la legge di Stefan-Boltzmann;
4. I valori della resistività del filo vengono valutati sezione per sezione in funzione della temperatura locale;
5. Per valutare una sorta di *conducibilità equivalente* dell'aria nei sottodomini precedentemente indicati, vengono utilizzati i valori delle temperature delle superfici che si affacciano sul dominio;
6. Sulle superfici esterne (esclusa quella della punta della candeletta) viene applicata la temperatura imposta dall'utente e letta nel foglio EXCEL dei dati di input;
7. l'ossido di magnesio è modellato come un isolante perfetto.

3 Descrizione del file di Input

Il file di input prevede l'inserimento delle coordinate geometriche necessarie per descrivere la geometria secondo le convenzioni della Fig. 1. Modificando il numero di

righe destinate alla descrizione della guaina e della spirale è possibile rendere la geometria più accurata, mentre per la camerina e il corpo motore/boccola è sufficiente inserire il valore di alcune coordinate significative come mostrato dal seguente estratto di foglio di calcolo (Fig. 3).

		GUAINA					
	Tratto Punta				N tratti		
L0	Lunghezza punta	1.00					
	Tratti Guaina	Lunghezza	D est in	D int in	D est fin	D int fin	
L1	1 tratto	6.16	4.00	2.00	4.00	2.00	
L2	2 tratto	2.84	4.00	2.00	5.00	3.00	
L3	3 tratto	41.50	5.00	3.00	5.00	3.00	
	Dati Camerina	Ascissa					
C1	Coordinate c1	24.09	5.50				
C2	Coordinate c2		6.50				
C3	Coordinate c3	25.64	8.40				
C4	Coordinate c4	46.57					
C5	Coordinate c5	36.50					
	Dati Corpo motore	Ascissa	Diametro				
M1	Coordinate m1	20.90	6.50				
M2	Coordinate m3		10.00				
M3	Coordinate m6		20.00				
	Dati Stelo	Ascissa	Diametro				
S	Coord. Inizio stelo	34.8	1.72				

Figura 3: Estratto di foglio di calcolo per l'inserimento dei dati geometrici

I successivi fogli sono dedicati all'inserimento delle caratteristiche fisiche dei materiali utilizzati, del valore delle condizioni al contorno e della tensione. Analogamente al software sviluppato per il modello monodimensionale questi ultimi dati possono essere sottoforma numerica o possono essere il nome di una funzione MATLAB. Nell'ultimo foglio del file è previsto l'inserimento dei dati utilizzati per il calcolo; in particolare la durata della simulazione e l'intervallo temporale tra due calcoli successivi. È possibile definire due *time step*: il primo, più piccolo, per il calcolo nella fase del transitorio che richiede una maggiore accuratezza; il secondo, più elevato, per la fase in cui la candeletta è in condizioni di regime. Questo aiuta a ottimizzare il tempo di calcolo.

4 Prove Sperimentali

I problemi precedentemente introdotti riguardanti l'imposizione delle condizioni al contorno e la determinazione del valore della conducibilità della polvere di magnesio (MgO), hanno portato alla necessità di condurre delle prove sperimentali nella sede della *Federal Mogul S.r.l.*, nelle settimane dal 3 al 13 Giugno e dal 30 Giugno al 11 Luglio, per meglio investigare il comportamento della candeletta e poter quindi disporre di una serie di risultati da poter analizzare. Le prove condotte sono state di due tipi:

- Caratterizzazioni della candeletta CHXXX realizzate con boccole corte e lunghe, per poter valutare l'effetto della camerina. La boccola crea infatti una intercapedine con la superficie esterna della guaina dove si hanno dei moti convettivi. Le prove sono state realizzate a diverse tensioni di alimentazione.
- Caratterizzazioni mirate a stabilire l'effettiva conducibilità della polvere di magnesio dopo la fase di martellatura.

Questa seconda parte è risultata essere la più articolata ed ha richiesto la realizzazione di candelette *ad hoc* per essere condotta. Sono state quindi realizzate 16 candele monospirali a geometria cilindrica a diversi gradi di martellatura partendo da un diametro di 7 mm. Le caratterizzazioni sono state condotte su candelette martellate a diametri di 6.9, 6.6, 6.3 e 6 mm. Di queste sono state svolte anche delle analisi radiografiche per avere le informazioni geometriche. Partendo dall'ipotesi che la martellatura, introducendo una compattazione dell'ossido, modifica, in particolare aumenta, la conducibilità della polvere rispetto a quella nominale³, l'obiettivo delle prove era fornire indicazioni circa il diverso comportamento ai vari stadi di compattazione. Le prove hanno confermato l'ipotesi di partenza e hanno suggerito il valore dei coefficienti correttivi da utilizzare per modificare la conducibilità.

5 Conclusioni

Alle luce delle numerose simulazioni effettuate le conclusioni a cui si è giunti sono le seguenti:

- Il modello fornisce buone indicazioni per quanto riguarda il profilo di temperatura soprattutto nella zona della punta. La discrepanza tra i valori sperimentali e quelli calcolati è dell'ordine dei 50°C, valore ritenuto accettabile dal momento che si raggiungono livelli di temperatura dell'ordine dei 1200°C.

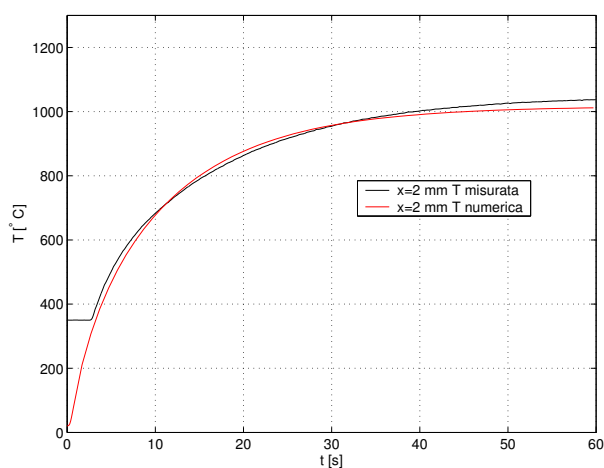


Figura 4: Andamento della temperatura sulla superficie della guaina

- I valori elettrici calcolati (resistenza, corrente) sono vicini a quelli sperimentali, questo indica una buona modellazione dei fenomeni termici, dal momento che i

³Il valore di riferimento è stato ricavato da *Kingery W.D., Introduction to Ceramics, New York: John Wiley and Sons, 1976*

valori di resistività dipendono dalla temperatura sulla spira che viene calcolata istante per istante dal codice;

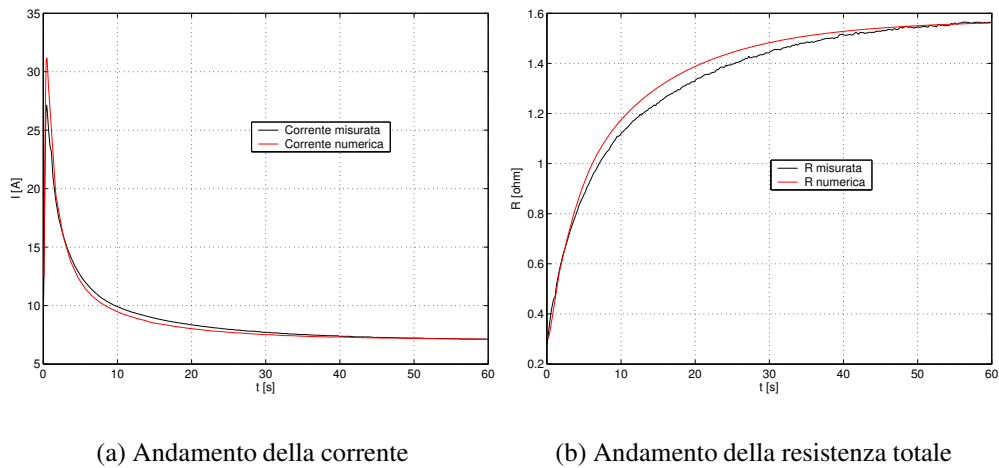


Figura 5: Risultati ottenuti per la candela n° 14 (realizzata ai fini della valutazione della conducibilità dell'ossido di magnesio)

- Gli scostamenti dei profili puntuali di temperatura possono essere dovuti a:
 - un'errata imposizione della condizione al contorno nella zona della punta dove effettivamente la temperatura può essere diversa da quella del motore e della boccia;
 - un errore nelle caratteristiche termiche dei materiali utilizzati (queste indicazioni sono di difficile reperibilità);
 - aver trascurato la conducibilità all'interno della spira;
 - un errore nella valutazione della sezione della spira. Questo dato gioca un ruolo importante nella determinazione delle caratteristiche elettriche della spira, ed è difficile da stimare dal momento che la vista in sezione della candela non consente una visione della sezione della spira perpendicolarmente al suo asse, di conseguenza l'immagine che si ha risulterà falsata rispetto alle dimensioni reali.

6 Sviluppi Futuri

La seconda parte del lavoro riguarderà:

- Uno studio del processo di deformazione della spirale a partire dalla coniazione. In questo modo sarà possibile simulare l'intero processo di progettazione a partire dai dati nominali;

- Uno studio sull'ottimizzazione del codice per diminuirne i tempi di calcolo;
- Una diversa modellazione della resistenza elettrica che tenga conto della sua conducibilità e della sua reale geometria di tipo elicoidale. In particolare si pensa di sostituire l'attuale modello, dato da resistenze toroidali, con un elemento generante distribuito con continuità all'interno dell'ossido.

Appendice

Il modello matematico è derivato dalla equazione del calore omogenea in tre dimensioni nella temperatura T :

$$C \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\kappa \nabla T) = 0 \text{ in } \Omega_{3D}, \quad (1)$$

dove C è la capacità termica e κ è la conducibilità termica. Il dominio computazionale (Fig: 1), Ω_{3D} , è considerato a simmetria cilindrica e comprende la parte di volume occupato dall'ossido, dalla guaina, dalla camerina e dal corpo circostante (boccola o motore), più le porzioni di aria racchiusa tra loro. L'elemento infinitesimo di volume $d\Omega_{3D}$ è rappresentato in Fig. 6 ed è:

$$d\Omega_{3D} = 2\pi r dr dx.$$

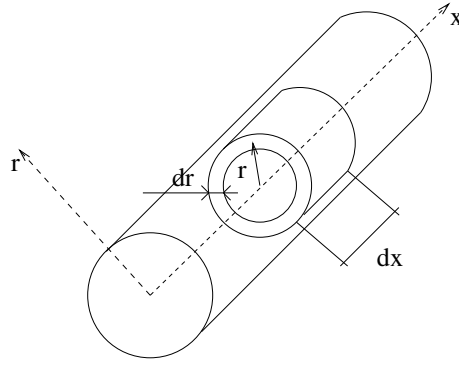


Figura 6: Schematizzazione del dominio di calcolo in tre dimensioni

Passando quindi alla formulazione debole della (1) moltiplicando per una opportuna funzione test v e integrando per parti sul dominio si ottiene:

$$\int_{\Omega_{2D}} \bar{C} \frac{\partial T}{\partial t} v dr dx + \int_{\Omega_{2D}} \bar{\kappa} \nabla T \nabla v dr dx - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega_{3D}} \kappa \frac{\partial T}{\partial n} v d(\partial\Omega_{3D}) \quad (2)$$

dove $\bar{C} = Cr$ e $\bar{\kappa} = \kappa r$ mentre $\partial\Omega_{3D}$ è il contorno del dominio tridimensionale che comprende la superficie esterna $(\partial\Omega_{3D})_{ext}$ e la superficie della spira $(\partial\Omega_{3D})_{spira}$. Per semplicità di notazione d'ora in avanti si indicherà Ω_{2D} (per la cui rappresentazione si veda la Fig. 1 dell'allegato tecnico) con Ω . Facendo riferimento alla Fig. 6, $d(\partial\Omega_{3D})_{ext} = 2\pi r dx$; nel caso più generale di raggio non costante (Fig: 7), la superficie esterna si ricava come:

$$\frac{d(\partial\Omega_{3D})_{ext}}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\pi(R_2 + R_1) \sqrt{\Delta x^2 + (R_2 - R_1)^2}}{\Delta x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\pi \frac{R_2 + R_1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{R_2 - R_1}{dx}\right)^2} dx \simeq \\
&\simeq 2\pi r \sqrt{1 + (dr/dx)^2} dx
\end{aligned} \tag{3}$$

essendo r la media dei raggi all'inizio (R_1) e alla fine (R_2) del tratto Δx .

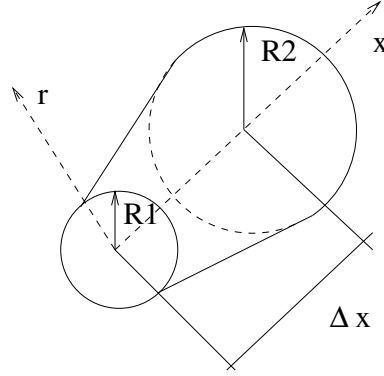


Figura 7: Superficie esterna con raggio non costante

Per quanto riguarda la superficie della spira (Fig. 8) si ottiene, sommando su tutti i passi i :

$$d(\partial\Omega_{3D})_{spira} = \sum_i L_S \frac{dl}{dx} ds,$$

dove $L_S = L_S(x)$ è il passo della spira e dl/dx è la densità di lunghezza di spira per unità di lunghezza assiale definita da:

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + 4\pi^2 \frac{R_S^2}{L_S^2} + \left(\frac{dR_S}{dx}\right)^2},$$

essendo $R_S = R_S(x)$ il raggio medio della spira.

Le condizioni al contorno da imporre sono le seguenti (si veda la Fig. 9):

$$\begin{aligned}
-\kappa \frac{\partial T}{\partial n} &= 0 && \text{su } \Gamma_{N1}, \\
-\kappa \frac{\partial T}{\partial n} &= h(T - T_a) + \sigma e (T^4 - T_a^4) && \text{su } \Gamma_{N2}, \\
-\kappa \frac{\partial T}{\partial n} &= -q && \text{su } \Gamma_{N3}, \\
T &= T_D && \text{su } \Gamma_D,
\end{aligned} \tag{4}$$

dove h è il coefficiente di scambio termico convettivo, σ è la costante di Stefan-Boltzmann, e rappresenta l'emissività, T_a è la temperatura ambiente e q è il calore

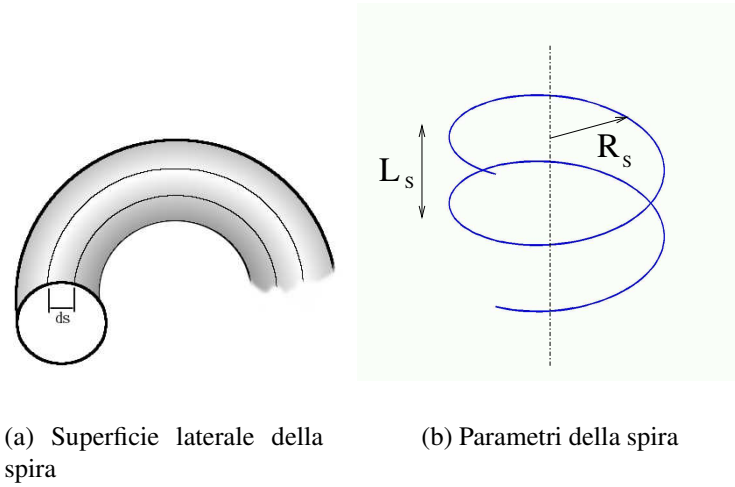


Figura 8: Rappresentazione della spira

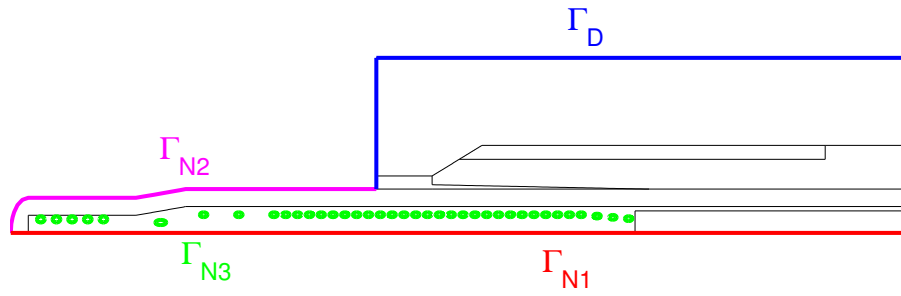


Figura 9: Schema dei contorni del dominio

per unità di superficie prodotto dalla spira per effetto Joule. La $(4)_1$ è ricavata da considerazioni di simmetria, la $(4)_2$ tiene conto dello scambio di calore con l'esterno di tipo convettivo e radiativo, la $(4)_3$ rappresenta lo scambio di calore con la spira e la $(4)_4$ è la condizione al contorno di Dirichlet. Sostituendo quindi nella (2) si ottiene:

$$\int_{\Omega} \bar{C} \frac{\partial T}{\partial t} v \, dr dx + \int_{\Omega} \bar{\kappa} \nabla T \nabla v \, dr dx + \int_{\Gamma_{N2}} (h(T - T_a) + \sigma e(T^4 - T_a^4)) v r \sqrt{1 + (dr/dx)^2} \, dx - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{N3}} q L_S \frac{dl}{dx} v \, ds = 0. \quad (5)$$

Conducibilità equivalente dell'aria

L'aria è considerata equivalente ad un corpo e sarà dotata di una propria conducibilità e capacità. Per valutare opportunamente le sue caratteristiche sono state fatte conside-

razioni sulla scambio termico tra due superfici poste a una certa distanza d tra loro e a due diverse temperature T_1 e T_2 (Fig. 10).

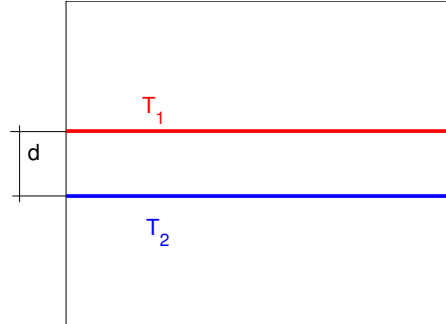


Figura 10: Schema per il calcolo della conducibilità equivalente dell'aria

La capacità termica è stata considerata trascurabile mentre per la conducibilità si è valutato il calore scambiato q con le notazioni precedentemente introdotte:

$$\begin{aligned}
 q &= h(T_2 - T_1) + \sigma e(T_2^4 - T_1^4) = \\
 &= h \frac{T_2 - T_1}{d} d + \sigma e \frac{T_2 - T_1}{d} (T_2 + T_1)(T_2^2 + T_1^2) d \simeq \\
 &\simeq \kappa_{eq} \frac{\partial T}{\partial n}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

In questo modo si ottiene una *conducibilità equivalente* pari a:

$$\kappa_{eq} = hd + \sigma e(T_2 + T_1)(T_2^2 + T_1^2)d. \tag{7}$$

Per valutare la bontà di questa approssimazione è stato risolto un *caso test* di cui è ricavabile la soluzione analitica. In particolare è stato risolto un problema di pura diffusione nel dominio rappresentato in Fig. 11.

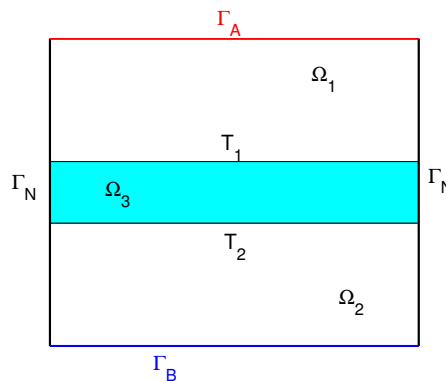


Figura 11: Dominio di calcolo per il caso test

Si suppongono Ω_1 e Ω_2 i domini di due materiali di cui è nota la conducibilità κ_1 , κ_2 , mentre Ω_3 è il *gap* d'aria in cui la conducibilità viene valutata secondo la (7). Il problema è il seguente:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\kappa \nabla T) = 0, & \text{in } \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3, \\ -\kappa \frac{\partial T}{\partial n} = 0, & \text{su } \Gamma_N, \\ T = T_A, & \text{su } \Gamma_A, \\ T = T_B, & \text{su } \Gamma_B. \end{cases} \quad (8)$$

e viene risolto con il metodo iterativo di Newton, utilizzando elementi finiti lineari e formule di quadratura dei trapezi per risolvere gli integrali presenti nella formulazione debole che danno origine alla *matrice di stiffness*. La soluzione analitica è invece ottenuta imponendo la continuità dei flussi di calore tra le due superfici, che porta alla scrittura del seguente sistema nelle incognite T_1 e T_2 :

$$\begin{cases} \kappa_1 \frac{T_A - T_1}{L} = \kappa_2 \frac{T_2 - T_B}{L} \\ \sigma(T_1^4 - T_2^4) + h(T_1 - T_2) = \kappa_2 \frac{T_2 - T_B}{L} \end{cases} \quad (9)$$

essendo L la distanza tra il bordo di Dirichlet e il *gap* d'aria. La soluzione analitica T_2 e' la radice del seguente polinomio:

$$\begin{aligned} & (\kappa_r^4 - 1)T_2^4 - 4C\kappa_r^3T_2^3 + 6C^2\kappa_r^2T_2^2 - \left(4C^3\kappa_r + \frac{h}{\sigma}(1 + \kappa_r) + \frac{\kappa_2}{\sigma L}\right)T_2 + \\ & + C^4 + \frac{h}{\sigma}C + \frac{\kappa_2}{\sigma L}T_B = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

con $\kappa_r = \kappa_2/\kappa_1$ e $C = T_A + \kappa_r T_B$. In Fig. 12 è riportata la soluzione ottenuta. Sono state fatte diverse prove facendo variare i coefficienti e i parametri geometrici; si è notato che l'errore assoluto sulla temperatura delle due superfici che si affacciano sul *gap* d'aria è dell'ordine di 10^{-8} - 10^{-11} . L'errore dipende dall'ampiezza del *gap* ed è tanto più basso quanto più piccolo è lo spessore, mentre risulta indipendente dalla tolleranza introdotta nelle iterazioni di Newton.

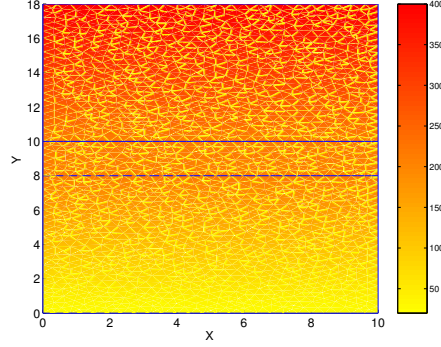


Figura 12: Risultati per $\kappa_1 = \kappa_2 = 1 W/(mK)$, $h = 100 W/(m^2K)$, $\sigma = 10^{-8} W/(m^2K^4)$, $T_1 = 400^\circ C$, $T_2 = 20^\circ C$, $d = 2 m$, $L = 8 m$

Approssimazione Numerica

A partire quindi dalla (5) si introduce una partizione del tempo t_k con $k = 0, \dots, n$, non necessariamente uniforme dove $t_n = t_f$ essendo $[0, t_f]$ l'intervallo di interesse e sia $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ il generico passo temporale tra due istanti consecutivi. Con un'approssimazione della derivata temporale del tipo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T^{k+1} - T^k}{\Delta t_k} \text{ con } k = 0 \dots n - 1,$$

e adottando la notazione $T^k \simeq T(t_k)$ si ottiene un'approssimazione semi-implicita:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\Delta t_k} \int_{\Omega} \bar{C} T v \, dr dx \right]^{k+1} + \left[\int_{\Omega} \bar{\kappa} \nabla T \nabla v \, dr dx \right]^{k+1} + \\ & + \left[\int_{\Gamma_{N2}} (hT + \sigma e T^4) v r \sqrt{1 + (dr/dx)^2} \, dx \right]^{k+1} = \\ & = \left[\frac{1}{\Delta t_k} \int_{\Omega} \bar{C} T v \, dr dx \right]^k + \left[\int_{\Gamma_{N2}} (hT_a + \sigma e T_a^4) v r \sqrt{1 + (dr/dx)^2} \, dx \right]^k + \\ & + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_{N3}} q L_S \frac{dl}{dx} v \, ds \right]^k \end{aligned} \quad (11)$$

La presenza di termini non lineari ($\sigma e T^4$) e di termini dipendenti dalla temperatura (\bar{C} , $\bar{\kappa}$, h) nella (11), richiede una linearizzazione e una risoluzione con un metodo iterativo tipo Newton. Introducendo quindi un indice j di iterazione, il termine non lineare può essere linearizzato come:

$$T_{j+1}^4 = (4T_j^3)T_{j+1} - 3T_j^4 \text{ con } j = 1 \dots n_j.$$

Ugualmente i termini \bar{C} , $\bar{\kappa}$ e h saranno:

$$\bar{C}_j^k = \bar{C}(T_j^k), \quad \bar{\kappa}_j^k = \bar{\kappa}(T_j^k), \quad h_j^{k+1} = h(T_j^k).$$

Alla luce di questi nuovi risultati si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{\Delta t_k} \int_{\Omega} \bar{C}_j T_{j+1} v \, dr dx \right]^{k+1} + \left[\int_{\Omega} \bar{\kappa}_j \nabla T_{j+1} \nabla v \, dr dx \right]^{k+1} + \\
& + \left[\int_{\Gamma_{N2}} (h_j T_{j+1} + \sigma e(4T_j^3) T_{j+1}) v r \sqrt{1 + (dr/dx)^2} \, dx \right]^{k+1} = \\
& = \left[\frac{1}{\Delta t_k} \int_{\Omega} \bar{C} T v \, dr dx \right]^k + \left[\int_{\Gamma_{N2}} (h_j T_a + \sigma e(T_a^4 + 3T_j^4)) v r \sqrt{1 + (dr/dx)^2} \, dx \right]^k + \\
& + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_{N3}} q L_S \frac{dl}{dx} v \, ds \right]^k \tag{12}
\end{aligned}$$

Per l'approssimazione spaziale sono stati scelti elementi finiti lineari e la formula di quadratura dei trapezi per l'integrazione. Le capacità e le conducibilità sono considerate costanti su ogni elemento e vengono quindi valutate nel centro.

Per quanto riguarda il contributo sulla superficie della spira si nota che a ciascuna sezione è stato attribuito il calore generato per effetto Joule nel metà passo precedente e successivo. È necessario quindi calcolare la resistenza totale R_{tot} sommando su tutti i passi di spira i come

$$R_{tot} = \sum_i \left(\rho \frac{L_S}{S} \frac{dl}{dx} \right)_i ,$$

dove ρ rappresenta la resistività. A questo punto è possibile ricavare la corrente I

$$I = \frac{\Delta V}{R_{tot}} ,$$

essendo ΔV la tensione imposta. Il calore generato per effetto Joule da un passo di spira è

$$Q_i = I^2 \left(\rho \frac{L_S}{S} \frac{dl}{dx} \right)_i ,$$

e, sapendo che la superficie laterale di un passo di spira è data da:

$$A_{lat_i} = \left(\pi \left(\frac{A_1 + A_2}{2} \right) L_S \frac{dl}{dx} \right)_i ,$$

dove A_1 e A_2 sono gli assi dell'ellisse che costituisce la sezione del filo, il calore per unità di superficie q che compare nella (5) risulta essere:

$$q_i = \left(\frac{Q}{A_{lat}} \right)_i = I^2 \left(\frac{2\rho}{S\pi(A_1 + A_2)} \right)_i .$$