

# Tecniche a Basi Ridotte per l'Ottimizzazione di Configurazioni di Innesto per Bypass Coronarici

Alfio Quarteroni<sup>a,b</sup>, Gianluigi Rozza<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*MOX-Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica "F.Brioschi",  
I-20133 Milano, Italia*

<sup>b</sup>*CMCS-École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL),  
CH-1015, Losanna, Svizzera.*

*E-mail: Alfio.Quarteroni@polimi.it, Gianluigi.Rozza@epfl.ch*

---

## Sommario

Viene applicato un metodo a basi ridotte per equazioni alle derivate parziali su domini parametrizzati allo scopo di approssimare il flusso del sangue attraverso un bypass aorto-coronarico. L'obiettivo del lavoro è quello di fornire (a) un'analisi di sensitività per grandezze geometriche rilevanti nella caratterizzazione della configurazione di innesto di un bypass e (b) una rapida e affidabile previsione del valore di certi funzionali integrali, denominati outputs (quali, per esempio, indici legati a grandezze fluidodinamiche). Le linee guida del lavoro sono finalizzate a (i) ottenere valide indicazioni circa le procedure di progetto e innesto chirurgico di un bypass, nella prospettiva futura dello sviluppo e dell'uso di protesi bioartificiali, (ii) sviluppare metodi numerici per l'ottimizzazione e la progettazione in biomeccanica e, (iii) fornire una relazione di tipo input-output retta da modelli con complessità mate-

matica e costi computazionali inferiori rispetto a quelli che si avrebbero risolvendo le equazioni della fluidodinamica mediante il metodo classico degli elementi finiti.

*Parole Chiave:* equazioni alle derivate parziali parametrizzate, problema di Stokes generalizzato, metodi a basi ridotte, ottimizzazione di bypass coronarici, emodinamica.

---

## **1 Progetto e Ottimizzazione di Configurazioni per Bypass Aorto-coronarici**

Quando un'arteria coronarica è affetta da una stenosi (occlusione) il muscolo del cuore non viene rifornito di ossigeno in maniera sufficiente dal flusso sanguigno. Un'anastomosi aorto-coronarica ristabilisce la quantità di ossigeno attraverso un intervento chirurgico di innesto di un bypass tra l'aorta e la zona a valle dell'occlusione nella coronaria. Attualmente sono disponibili diversi tipi e diverse forme di bypass aorto-coronarici, riconducibili a diverse procedure chirurgiche di innesto. La simulazione numerica di flussi fisiologici ci garantisce una migliore comprensione dei fenomeni fluidodinamici coinvolti nelle disfunzioni alle coronarie (si veda [6]), può garantire una potenziale riduzione dei casi di fallimento operatorio e post-operatorio dell'innesto di un bypass e, inoltre, può suggerire nuove tecniche nelle procedure di innesto tramite metodi meno invasivi e configurazioni ottimizzate (si veda [7] e [1]). In questo lavoro vengono sviluppati e proposti schemi efficienti di approssimazione basati su tecniche a basi ridotte [5] applicati a equazioni differenziali alle derivate parziali parametrizzate, lo scopo principale è di fornire utili indicazioni in tempo reale su grandezze fluidodinamiche di interesse (gli outputs) in un ambiente di calcolo ripetitivo, perché basato su algoritmi iterativi, come quello di un problema di ottimizzazione, oppure del calcolo di un'analisi di

sensibilità di grandezze geometriche rilevanti. Con riferimento alla Figura 1 queste grandezze possono essere: il diametro del nuovo innesto del bypass  $t$ , il diametro dell'arteria  $D$ , la lunghezza di stenosi  $S$  (distanza tra l'occlusione e il nuovo ramo di innesto), l'angolo tra il ramo di innesto del bypass e l'arteria  $\theta$  e l'altezza della configurazione "a ponte" del bypass  $H$ . Si veda [10] per uno scenario più generale.

## **2 Tecniche a Basi Ridotte per le Equazioni di Stokes in Domini Parametrizzati**

Anziché trattare direttamente le equazioni complete di Navier-Stokes ci limiteremo a considerare un modello linearizzato del tipo di Stokes. Ciò in quanto ci poniamo nella prospettiva di fornire metodi di ottimizzazione a bassa fedeltà da verificare poi con delle simulazioni numeriche basate su modelli di fluido più complessi (e a più alta fedeltà), quali appunto le equazioni di Navier-Stokes. Un'ulteriore estensione della complessità del problema consiste nel ricorrere a domini di calcolo a pareti curve. Questo approccio a bassa fedeltà si presta ad essere utilizzato per uno studio di massima della configurazione da prendere poi in considerazione e raffinare ulteriormente: si tratta dunque di un pre-processo. Inoltre, l'approssimazione del flusso con le equazioni di Stokes risulta, come vedremo, in prima approssimazione accettabile, in quanto stiamo considerando flussi a basso numero di Reynolds in arterie (le coronarie) di dimensioni medie, dove la velocità del sangue è bassa e, infine, il regime del flusso si può considerare come laminare.

Le proprietà essenziali di un metodo a basi ridotte sono (*i*) la rapida convergenza basata su funzioni approssimanti globali (la soluzione è ottenuta

effettuando una proiezione di Galerkin su uno spazio di approssimazione  $W_N$  dato dalla combinazione di diverse soluzioni delle equazioni differenziali che governano il problema stesso, risolte per  $N$  diverse combinazioni di parametri scelti opportunamente nello loro range di variazione); (ii) la scomposizione off-line/on-line delle procedure computazionali, che permettono un disaccoppiamento del problema tra la fase di generazione della base (ridotta) e la procedura di proiezione (per la classe di problemi retti da una dipendenza affine dei parametri); infine (iii) il fatto che la procedura computazionale durante la cosiddetta fase on-line—per cui dato un nuovo valore del parametro, si calcola un output di interesse—dipende solo dalla dimensione  $N$  (tipicamente molto piccola) e dalla complessità parametrica del problema ha permesso di ottenere economie computazionali di vari ordini di grandezza.

Come già anticipato, in Figura 1 è rappresentata una configurazione bidimensionale parametrizzata per un bypass, suddivisa in quattro semplici sottodomini. Dapprima si costruisce un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali parametrizzate ( $P^2DES$ ) dipendenti da un vettore di parametri geometrici indicato con  $\mu$ , da cui dipendono i coefficienti delle equazioni. Il problema di Stokes sul dominio reale  $\hat{\Omega}$  è il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = F_s \text{ in } \hat{\Omega} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \hat{\Omega} \\ \mathbf{u} = 0 \text{ on } \Gamma_w; \mathbf{u} = \bar{g}_{in} \text{ on } \Gamma_{in}, \left( \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - p \mathbf{n} \right) = 0 \text{ on } \Gamma_{out} \end{array} \right. \quad (1)$$

dove  $\mathbf{u}$  e  $p$  indicano, rispettivamente, il vettore velocità e il campo di pressione. Abbiamo condizioni al bordo di tipo Dirichlet omogenee sulle pareti dell'arteria e del bypass indicate con  $\Gamma_w$  e condizioni di Neumann omogenee

(sforzo nullo) sull'outflow  $\Gamma_N = \Gamma_{out}$ ;  $\Gamma_D = \Gamma_{in} \cup \Gamma_w$  (si veda sempre la Figura 1);  $F_s$  è un campo di forze distribuite (per esempio quello gravitazionale). Nel nostro caso:  $\bar{\Omega} = \bigcup_{r=1}^R \bar{\Omega}_r$ ,  $R = 4$ . Il dominio reale  $\hat{\Omega}$  della Figura 1 è stato trasformato in un *dominio di riferimento* da una *mappa affine* che va dai sottodomini  $\hat{\Omega}_r$  verso  $\Omega_r$ . Le coordinate  $\hat{x} \in \hat{\Omega}_r$ ,  $r = 1, \dots, R$ , sono mappate nella loro immagine corrispondente  $x \in \Omega_r$ . La trasformazione è data da  $x = \mathcal{G}^r(\mu; \hat{x}) = G^r(\mu)\hat{x} + g^r$ ,  $1 \leq r \leq R$ , così che possiamo scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial \hat{x}_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = G_{ji}^r(\mu) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq d = 2,$$

e nel dominio di riferimento  $\Omega$  abbiamo la seguente formulazione debole del problema (1): trovare  $\mathbf{u} \in Y = H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ ,  $p \in Q = L^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  tali che:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\mu; \mathbf{u}(\mu), \mathbf{w}) + \mathcal{B}(\mu; p(\mu), \mathbf{w}) = \langle F_s, \mathbf{w} \rangle + \langle F^0, \mathbf{w} \rangle, \quad \forall \mathbf{w} \in Y \\ \mathcal{B}(\mu; q, \mathbf{u}(\mu)) = \langle G^0, q \rangle \quad \forall q \in Q. \end{cases} \quad (2)$$

$F^0, G^0$  sono termini dovuti al rilevamento dei dati al bordo a causa delle condizioni al contorno non omogenee di tipo Dirichlet sull'inflow  $\Gamma_{in}$ . Lo spazio  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  è lo spazio delle funzioni (vettoriali) di  $L^2(\Omega)$  le cui derivate distribuzionali sono anch'esse in  $L^2(\Omega)$ , che si annullano sulla frontiera  $\Gamma_D \subset \Omega$ .

Inoltre:

$$\mathcal{A}(\mu, \mathbf{u}(\mu), \mathbf{w}) = \sum_{r=1}^R \int_{\hat{\Omega}_r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \left( G_{ii'}^r(\mu) \hat{\nu}_{i'j'} G_{jj'}^r(\mu) \det(G^r(\mu))^{-1} \right) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} d\Omega \quad \forall \mathbf{w} \in Y, \quad (3)$$

$$\mathcal{B}(\mu, p(\mu), \mathbf{w}) = - \sum_{r=1}^R \int_{\hat{\Omega}_r} p \left( G_{ij}^r(\mu) \det(G^r(\mu))^{-1} \right) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} d\Omega \quad \forall \mathbf{w} \in Y, \quad (4)$$

$$\langle F_s, \mathbf{w} \rangle = \sum_{r=1}^R \int_{\hat{\Omega}_r} (\hat{f}^r \det(G^r(\mu))^{-1}) \mathbf{w} d\Omega; \quad \langle F^0, \mathbf{w} \rangle = - \langle \mathcal{A}g_{in}, \mathbf{w} \rangle; \quad \langle G^0, q \rangle = \langle \mathcal{B}q, g_{in} \rangle. \quad (5)$$

dove  $\widehat{\nu}_{i,j} = \nu \delta_{i,j}$ ,  $g_{in}$  è il termine che rappresenta la condizione di inflow non omogenea (nel nostro caso sarà un profilo di velocità parabolico di Hagen-Poiseuille),  $\widehat{f}_r$  è un campo di forze. Introduciamo il vettore dei parametri  $\mu = \{t, D, L, S, H, \theta\} \in \mathcal{D}^\mu \subset \mathbb{R}^P$ ,  $\mathcal{D}^\mu$  è dato dal seguente prodotto cartesiano:

$$[t_{min}, t_{max}] \times [D_{min}, D_{max}] \times [L_{min}, L_{max}] \times [S_{min}, S_{max}] \times [H_{min}, H_{max}] \times [\theta_{min}, \theta_{max}],$$

i cui fattori indicano l'intervallo di variazione dei singoli parametri. I *tensori di trasformazione* per le forme bilineari sono definiti di seguito. Per le forme bilineari che rappresentano i termini viscosi abbiamo:

$$\nu_{ij}^r(\mu) = G_{ii'}^r(\mu) \widehat{\nu}_{i'j'} G_{jj'}^r(\mu) \det(G^r(\mu))^{-1}, 1 \leq i, j \leq 2, r = 1, \dots, R;$$

nel nostro caso specifico, per ogni sottodominio:

$$\nu^1 = \nu \begin{bmatrix} \frac{t}{H} & -\tan \theta \\ -\tan \theta & \frac{1+\tan^2 \theta}{t} H \end{bmatrix}; \nu^2 = \nu \begin{bmatrix} \frac{S}{D} & 0 \\ 0 & \frac{D}{S} \end{bmatrix}; \nu^3 = \nu \begin{bmatrix} \frac{t}{D} & 0 \\ 0 & \frac{D}{t} \end{bmatrix}; \nu^4 = \nu \begin{bmatrix} \frac{L}{D} & 0 \\ 0 & \frac{D}{L} \end{bmatrix} \quad (6)$$

I tensori per *i termini di pressione e di divergenza* sono:

$$\chi_{ij}^r(\mu) = G_{ij}^r \det(G^r(\mu))^{-1}, 1 \leq i, j \leq 2, r = 1, \dots, R.$$

Più precisamente nei quattro sottodomini abbiamo:

$$\chi^1 = \begin{bmatrix} t & -H \tan \theta \\ 0 & H \end{bmatrix}; \chi^2 = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}; \chi^3 = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}; \chi^4 = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad (7)$$

Inoltre, possiamo definire

$$\Theta^{q(i,j,r)}(\mu) = \nu_{ij}^r(\mu), \quad \langle \mathcal{A}^{q(i,j,r)} \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \int_{\Omega_r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} d\Omega, \quad (8)$$

$$\Phi^{s(i,j,r)}(\mu) = \chi_{ij}^r(\mu), \quad \langle \mathcal{B}^{s(i,j,r)} p, \mathbf{w} \rangle = - \int_{\Omega_r} p \frac{\partial w_i}{\partial x_j} d\Omega, \quad (9)$$

per  $1 \leq r \leq R$ ,  $1 \leq i, j \leq d = 2$ , in modo tale da riscrivere i vari termini come somme di prodotti tra due fattori: uno dipendente dai parametri, l'altro indipendente e calcolato una sola volta nel dominio di riferimento.

Precisamente:

$$\mathcal{A}(\mu, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \sum_{q=1}^{Q^a} \Theta^q(\mu) \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{w})^q; \quad \mathcal{B}(\mu, p, \mathbf{w}) = \sum_{s=1}^{Q^b} \Phi^s(\mu) \mathcal{B}(p, \mathbf{w})^s;$$

nel nostro caso  $Q^a = 20$  e  $Q^b = 9$ , in realtà,  $\max(Q^a) = d \times d \times d \times R = 32$  e  $\max(Q^b) = d \times d \times R = 16$ , mentre  $q$  e  $s$  sono indici condensati di  $i, j, r$ .

Procediamo con l'approssimazione a basi ridotte prendendo un campionario opportuno costituito da  $N$  vettori di parametri  $S_N^\mu = \{\mu^1, \dots, \mu^N\}$ , dove  $\mu^n \in \mathcal{D}^\mu$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Risolviamo  $N$  volte il problema (2).

Lo spazio a basi ridotte per la pressione è  $Q_N = \text{span} \{\xi_n, n = 1, \dots, N\}$ , dove  $\xi_n = p(\mu^n)$ .

Lo spazio a basi ridotte per la velocità è  $Y_N^\mu = \text{span} \{\sigma_n, n = 1, \dots, 2N\} = \text{span} \{\zeta_n, T^\mu \xi_n, n = 1, \dots, N\}$ , dove  $\zeta_n = \mathbf{u}(\mu^n)$ . La coppia  $(\mathbf{u}(\mu^n), p(\mu^n))$  rappresenta la soluzione (ottenuta con un metodo numerico, ad esempio quello degli elementi finiti) del problema di Stokes in corrispondenza al valore del parametro  $\mu^n$ . L'operatore  $T^\mu: Q \rightarrow Y$  è il cosiddetto operatore *supremizer*. Per ogni valore  $q$  del campo di pressione discreto, esso è definito nel modo seguente:

$$(T^\mu q, \mathbf{w})_Y = \mathcal{B}(\mu; q, \mathbf{w};), \quad \forall \mathbf{w} \in Y.$$

Ora per ogni valore  $\xi_n$  determinato in precedenza, il valore  $T^\mu \xi_n$  viene usato per arricchire lo spazio di approssimazione delle velocità. Notiamo che sfruttando la *dipendenza affine* di  $\mathcal{B}(\mu; q, \mathbf{w})$  rispetto ai parametri e la *linearità* dell'operatore  $T^\mu$  possiamo così scrivere, per ogni valore di  $\xi$  e  $\mu$  assegnato:

$$T^\mu \xi = \sum_{q=1}^{Q^b} \Phi^q(\mu) T^q \xi.$$

Il problema nella formulazione a basi ridotte diventa: trovare  $(\mathbf{u}_N(\mu), p_N(\mu)) \in Y_N^\mu \times Q_N$  tali per cui:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\mu; \mathbf{u}_N(\mu), \mathbf{w}) + \mathcal{B}(\mu; p_N(\mu), \mathbf{w}) = \langle F, \mathbf{w} \rangle, \quad \forall \mathbf{w} \in Y_N^\mu \\ \mathcal{B}(\mu; q, \mathbf{u}_N(\mu)) = \langle G, q \rangle, \quad \forall q \in Q_N. \end{cases} \quad (10)$$

La presenza dei *supremizers* nello spazio  $Y_N^\mu$  delle velocità consente di dimostrare che gli spazi delle soluzioni  $Y_N^\mu$  e  $Q_N$  verificano la seguente proprietà: esiste una costante positiva  $\beta_0$  tale che

$$\beta_N(\mu) \geq \beta(\mu) \geq \beta_0 > 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{D}^\mu \quad (11)$$

dove

$$\beta_N(\mu) = \inf_{q \in Q_N} \sup_{\mathbf{w} \in Y_N^\mu} \frac{\mathcal{B}(\mu, q, \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_Y \|q\|_Q}$$

e

$$\beta(\mu) = \inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{w} \in Y} \frac{\mathcal{B}(\mu, q, \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_Y \|q\|_Q},$$

si veda [8]. Notiamo che grazie alla (11) gli spazi a basi ridotte verificano una condizione *inf-sup* con costante non inferiore a quella che si avrebbe usando



spazi ad elementi finiti. Una volta assemblate ed arricchite le basi per gli spazi di approssimazione possiamo passare al loro utilizzo “in tempo reale”: per ogni nuovo valore del parametro  $\mu$  cerchiamo una soluzione che sia una combinazione delle soluzioni precedentemente calcolate e memorizzate, ovvero:

$$\mathbf{u}_N(\mu) = \sum_{j=1}^{2N} \mathbf{u}_{Nj}(\mu)\sigma_j, \quad p_N(\mu) = \sum_{l=1}^N p_{Nl}(\mu)\xi_l;$$

i coefficienti (pesi) delle combinazioni precedenti sono le incognite che si ottengono risolvendo (in tempo reale) il seguente sistema lineare del problema a basi ridotte:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{2N} A_{ij}^\mu \mathbf{u}_{Nj}(\mu) + \sum_{l=1}^N B_{il}^\mu p_{Nl}(\mu) = F_i^\mu & 1 \leq i \leq 2N \\ \sum_{j=1}^{2N} B_{jl}^\mu \mathbf{u}_{Nj}(\mu) = G_l^\mu & 1 \leq l \leq N; \end{cases} \quad (12)$$

dove:

$$A_{ij}^\mu = \sum_{k=1}^{Q^a} \Theta^k(\mu) \mathcal{A}(\sigma_i, \sigma_j)^k, \quad B_{il}^\mu = \sum_{k=1}^{Q^b} \Phi^k(\mu) \mathcal{B}(\sigma_i, \xi_l)^k,$$

$$F_i^\mu = \langle F, \sigma_i \rangle, \quad G_l^\mu = \langle G, \xi_l \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 2N, \quad 1 \leq l \leq N$$

Il sistema ha la stessa struttura di quello che si ottiene applicando il metodo degli elementi finiti a un problema di Stokes, ma in questo caso le dimensioni delle matrici sono molto contenute. Inoltre, le basi scelte rappresentano delle approssimanti globali. Per ulteriori dettagli sulla approssimazione a basi ridotte del problema di Stokes e per alcuni aspetti riguardanti la stabilità di approssimazione e algebrica (relativa al numero di condizionamento della matrice che rappresenta il sistema) si rimanda a [4].

Torniamo ora al nostro problema originario. Come misura della perturbazione

del flusso sanguigno in seguito all'operazione di innesto del bypass consideriamo l'incremento della velocità media del sangue:

$$s_v(\mu) = \frac{1}{\text{mis}(\Omega)} \sum_{r=1}^R \int_{\Omega_r} |\mathbf{u}| d\Omega = \frac{1}{\text{mis}(\Omega)} \sum_{r=1}^R \int_{\Omega_r} (|u|^2 + |v|^2)^{\frac{1}{2}} d\Omega, \quad (13)$$

essendo  $(u(\mu), v(\mu))$  le componenti della velocità  $\mathbf{u}$ . Inoltre, consideriamo un secondo indice di interesse: la vorticità del sangue, quantità legata a vari fenomeni di interesse fluidodinamico (dissipazione dell'energia viscosa, sforzi a parete e campo di velocità):

$$s_w(\mu) = \sum_{r=1}^R \int_{\Omega_r} \left( \frac{\partial v(\mu)}{\partial x} - \frac{\partial u(\mu)}{\partial y} \right) d\Omega. \quad (14)$$

Grazie al *Teorema di Green* (versione bidimensionale del *Teorema di Stokes o del rotore*) abbiamo un legame tra la vorticità distribuita e l'integrale della velocità lungo il contorno e possiamo scrivere  $s_w(\mu)$  attraverso integrali di bordo:

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) dx dy = \int_{\Gamma} (u dx + v dy). \quad (15)$$

Nel nostro caso gli unici contributi non nulli dati dalla velocità lungo il contorno sono sulla zona di inflow e di outflow considerate (un sottodominio di interesse è quello nella zona a valle dell'innesto per esempio). Per ulteriori approfondimenti si veda [9].

### 3 Alcuni Risultati Numerici

Grazie all'uso delle basi ridotte, possiamo fornire in tempo reale utili informazioni “cliniche” (legate per esempio alle perturbazioni del flusso sanguigno)

su un grandissimo numero (migliaia) di configurazioni descritte da diverse combinazioni di parametri geometrici. Con questa analisi è possibile capire ad esempio il ruolo giocato dalle singole grandezze geometriche e la loro reciproca influenza.

I risultati numerici mettono in evidenza una convergenza molto rapida rispetto ad  $N$  del metodo di approssimazione a basi ridotte (la convergenza teorica per un problema ellittico e una opportuna distribuzione dei parametri è di tipo esponenziale, si veda [3]). Tale proprietà permette anche uno stretto controllo sulla dimensione massima  $N$  degli spazi di approssimazione e di contenere quindi le dimensioni del sistema a basi ridotte. A tale riguardo è utile osservare che il sistema algebrico ha una struttura a blocchi del tipo

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Per l'assemblaggio della matrice serve un numero di operazioni dell'ordine di  $O(Q^a(Q^b + 1)^2 4N^2)$  per il blocco  $A$ ,  $O((Q^b + 1)^2 2N^2)$  per  $B$ . Infine, servono  $O((Q^b + 1)N)$  operazioni per il vettore che rappresenta il termine noto  $F$ . A questi si aggiungono  $O(9N^3)$  operazioni per "l'inversione" della matrice del sistema a base ridotte.

Riportiamo in Tabella 1 alcuni risultati riguardanti il confronto tra i costi computazionali per ottenere una soluzione con il metodo a basi ridotte (parte on-line) e con quello a elementi finiti (costo computazionale medio di riferimento CPUtime 112.23, considerando griglie con elementi triangolari dell'ordine di  $10^3$ ). Il caso test si riferisce a una configurazione con un solo parametro geometrico variabile, il valore percentuale indica il costo online del metodo a basi ridotte confrontato con quello della soluzione a elementi finiti. Si noti come si

riesca a raggiungere dei livelli di precisione già molto buoni per  $N = 13$  con costi computazionali molto contenuti (12.8%) rispetto alla soluzione calcolata con il metodo degli elementi finiti.

$N$	$CPUtime$	errore $H^1$	%	$N$	$CPUtime$	errore $H^1$	%
1	1.59	$6.24E - 1$	1.4	2	2.44	$2.16E - 1$	2.2
3	3.22	$6.58E - 3$	2.9	4	4.93	$5.30E - 4$	4.4
5	5.90	$1.92E - 4$	5.2	6	5.90	$1.006E - 4$	5.2
7	6.68	$5.27E - 5$	5.9	8	7.55	$3.36E - 5$	6.7
9	8.44	$6.83E - 7$	7.5	10	9.31	$1.11E - 7$	8.3
11	10.61	$2.66E - 8$	9.4	12	14.11	$1.98E - 8$	12.5
13	14.38	$1.25E - 8$	12.8	14	17.89	$2.91E - 12$	15.9
15	20.60	$1.38E - 12$	18.4	16	24.64	$4.05E - 13$	21.9
17	24.62	$2.20E - 13$	21.9	18	23.61	$2.74E - 14$	21.1
19	24.02	$2.19E - 14$	21.4	20	25.25	$1.39E - 15$	22.5

Tabella 1

Costi Computazionali (confronto % con la soluzione a elementi finiti) al variare di  $N$  (e relativo grado di precisione: errore  $H^1$  sulla velocità).

I tests numerici su configurazioni parametrizzate di bypass (Figura (1)) sono stati condotti imponendo un numero di Reynolds medio dell'ordine di  $10^3$ , una viscosità cinematica  $\nu$  per il sangue pari a  $4 \cdot 10^{-6} m^2 s^{-1}$  e un campo di forze gravitazionali  $f = (0, 9.8) m \cdot s^{-2}$ . Le soluzioni usate come basi sono state ottenute mediante metodo di Galerkin-Elementi Finiti con elementi

triangolari di tipo Taylor-Hood (rispettivamente  $P^2$  e  $P^1$  per velocità e pressione). La Figura (2) mostra i risultati di convergenza degli errori ( $H^1$  per la velocità e  $L^2$  per la pressione) testando un grande numero di configurazioni e confrontando la soluzione a basi ridotte con quella a elementi finiti. Sono stati studiati tre diversi casi test orientati a fornire dati di interesse “clinico” mediante la risoluzione in tempo reale di una relazione di tipo *input-output*. La Figura (3) mostra il primo caso studiato: l’incremento di velocità media del sangue (output di interesse (13)) al variare dell’angolo di innesto del bypass (gli altri parametri sono stati congelati): variando l’angolo  $\theta$  da  $\sim 0$  a  $\frac{\pi}{3}$  l’incremento della velocità media è molto alto nell’intervallo  $[0, \pi/6]$  e più contenuto nell’intervallo  $[\pi/6, \pi/3]$ . I risultati sono riportati per diversi valori di  $N$  per sottolineare la fedeltà dell’approssimazione a basi ridotte anche con poche funzioni di base. La Figura (4) riporta una misura della perturbazione del flusso al variare della quantità  $\frac{S}{D}$ : il rapporto tra la lunghezza di stenosi e il diametro del bypass (abbiamo delle prestazioni migliori quando il rapporto  $\frac{S}{D} \geq 1$ ) e la quantità  $\frac{t}{D}$  (in questo caso per diminuire la perturbazione sul flusso è meglio avere rapporti inferiori all’unità, cioè il diametro del bypass leggermente inferiore di quello dell’arteria). Utilizzando come indice la vorticità  $s_w(\mu)$  i risultati sono in linea con i precedenti, in questo caso il parametro geometrico a dominare il problema è il rapporto  $\frac{t}{D}$ , l’angolo e’ importante se si confrontano configurazioni con rapporto  $\frac{t}{D}$  costante. Il valore “ottimale” per questa quantità, al fine di ridurre la vorticità nella zona a valle dell’innesto, sta nell’intervallo  $0.8 - 0.95$ . Come si può vedere in Figura (5) in questa zona di variazione del rapporto  $\frac{t}{D}$  la vorticità ha un valore contenuto e, inoltre, l’approssimazione fornita dal considerare il problema di Stokes risulta accettabile se confrontata con la soluzione fornita dalle equazioni di Navier-Stokes.

## 4 Conclusioni e Sviluppi

L'applicazione del metodo a basi ridotte a configurazioni geometriche parametrizzate di bypass coronarici permette di ricavare “in tempo reale” un'analisi di sensitività delle varie grandezze geometriche che determinano le varie tipologie di configurazione (di massima) di un bypass. Tale analisi è basata su alcuni indici di interesse (grandezze fluidodinamiche). I risultati ottenuti in questa fase preliminare (pre-processo) possono essere integrati con uno studio particolareggiato di alcuni “punti critici” della configurazione (per esempio la zona di innesto [7]) e ulteriormente approfonditi considerando modelli sempre più complessi, ma più costosi.

Si è, inoltre, approfondito il ruolo giocato dalla vorticità del sangue come misura di un flusso sanguigno perturbato dopo l'impianto di un bypass in relazione all'individuazione delle grandezze geometriche più rilevanti.

Le linee guida di sviluppo del presente lavoro, qui brevemente descritto, sono dedicate all'applicazione del metodo a basi ridotte (i) alle equazioni di Navier-Stokes in domini parametrizzati (si veda [11]), (ii) a problemi che comportano l'uso di mappe con una dipendenza non affine dai parametri (per esempio con l'introduzione di modelli di bypass a pareti curve) [2] e infine (iii) a problemi con un grande numero di parametri geometrici, per esempio problemi di ottimizzazione di forma.

### Ringraziamenti

Questo lavoro è stato sviluppato in collaborazione con il Prof. Anthony Patera del Massachusetts Institute of Technology (MIT) di Boston, Stati Uniti.

Gli autori ringraziano il supporto fornito dall'Unione Europea tramite il progetto RTN-HaeMOdel "Mathematical Modelling in Haemodynamics".

Figure

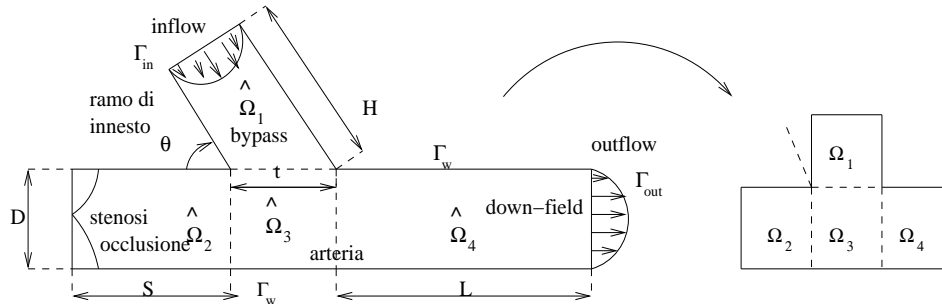


Figura 1. Configurazione schematica del bypass e rappresentazione del dominio reale (a sinistra) e quello di riferimento (a destra).

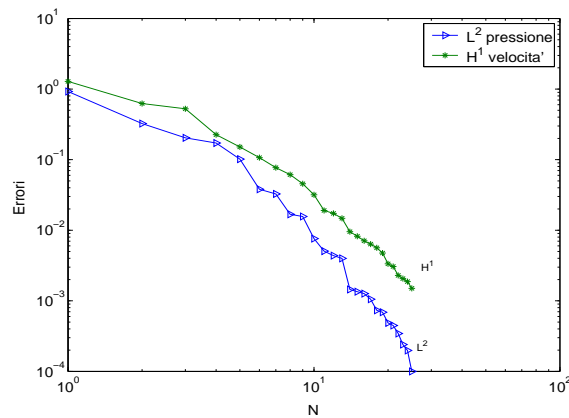


Figura 2. Risultati di convergenza per il metodo a basi ridotte: errore medio ( $H^1$ ) per la velocità e ( $L^2$ ) per la pressione, confrontando la soluzione a basi ridotte con quella del metodo a elementi finiti.

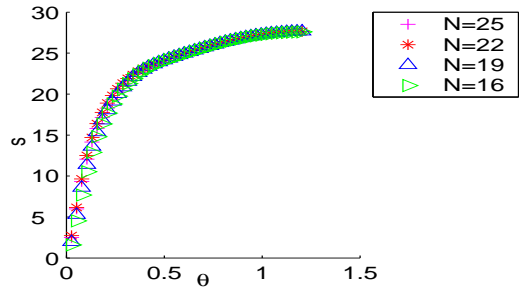


Figura 3. Incremento della velocità media  $s_v$  [ $ms^{-1} \cdot 10^{-2}$ ] al variare dell'angolo di innesto del bypass  $\theta$ . Soluzioni calcolate con un diverso numero  $N$  di funzioni di base.

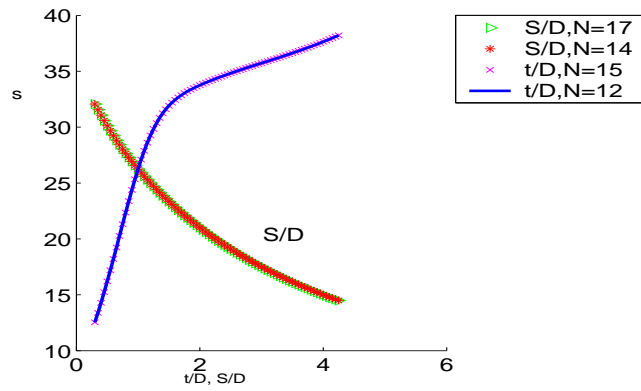


Figura 4. Incremento della velocità media  $s_v$  [ $ms^{-1} \cdot 10^{-2}$ ] al variare dei rapporti  $\frac{t}{D}$  (diametro bypass/arteria) e  $\frac{S}{D}$  (lunghezza stenosi/diametro arteria) per varie approssimazioni a basi ridotte con diversi valori di  $N$ .



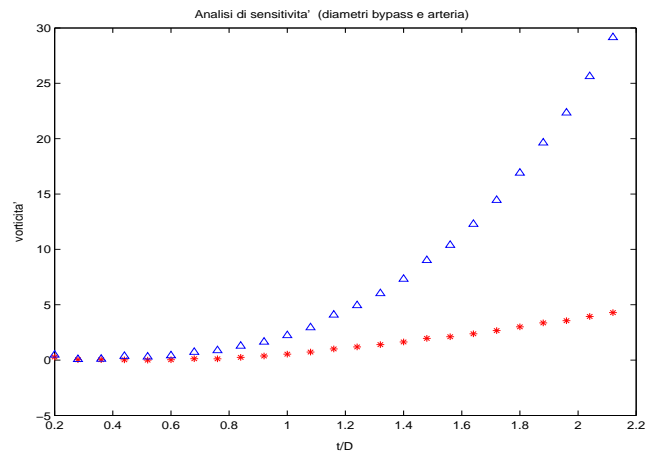


Figura 5. Incremento della vorticit  distribuita  $s_w$  [ $s^{-1} \cdot 10^{-2}$ ] al variare del rapporto tra diametro del bypass e dell'arteria  $\frac{t}{D}$  e confronto tra la soluzione ottenuta con le equazioni di Stokes (\*) e Navier-Stokes.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Agoshkov V, Quarteroni A, Rozza G. *Shape design in aorto-coronary bypass anastomoses using perturbation theory*. In corso di stampa su SIAM Journal on Numerical Analysis, 2005.
- [2] Barrault M, Maday Y, Nguyen NC and Patera AT. *An “empirical interpolation” method: application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations*. C. R. Acad. Sci. Paris, Analyse Numerique, Serie I, 2004, 339, pp.667-672.
- [3] Maday Y, Patera AT, Turinici G. *A priori convergence theory for reduced-basis approximations of single-parameter elliptic partial differential equations*. Journal of Scientific Computing, Vol. 17, No.1-4 (2002), pp. 437-446.
- [4] Patera AT, Rozza G, Veroy K. *Reduced basis methodologies for Stokes equations in parametrized domains*. EPFL-IACS report 22.2004. Preprint.
- [5] Prud’homme C, Rovas D, Veroy K, Maday Y, Patera AT and Turinici G, *Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations: reduced-basis output bound methods*. J. Fluids Engineering, Vol.172 (2002), pp.70-80.
- [6] Quarteroni A, Formaggia L. *Mathematical modelling and numerical simulation of the cardiovascular system*, in Ciarlet PG and Lions JL Eds, Modelling of Living Systems, Handbook of Numerical Analysis Series, Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [7] Quarteroni A, Rozza G. *Optimal control and shape optimization of aorto-coronary bypass anastomoses*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol.13, No. 12 (2003), pp.1801-1823.

- [8] Quarteroni A, Valli A. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [9] Rozza G. *Optimal flow Control and Reduced Basis Techniques in Shape Design with Application to Arterial Bypass*. Tesi di Dottorato, EPFL Lausanne, Dicembre 2005.
- [10] Rozza G. *On optimization, control and shape design of an arterial bypass*. International Journal Numerical Methods for Fluids, Vol. 47, No.10-11 (2005), pp. 1411-1419.
- [11] Veroy K and Patera AT. *Certified real-time solution of the parametrized steady incompressible Navier-Stokes equations; Rigorous reduced-basis a posteriori error bounds*. International Journal Numerical Methods for Fluids, Vol. 47, No.8-9 (2005), pp.773-788.