MOX–Report No. 22/2014

Insegnare Matematica con Mathematica

Arioli, G.

MOX, Dipartimento di Matematica "F. Brioschi"
Politecnico di Milano, Via Bonardi 9 - 20133 Milano (Italy)

mox@mate.polimi.it http://mox.polimi.it

INSEGNARE MATEMATICA CON MATHEMATICA™

GIANNI ARIOLI

Sommario. In questo articolo vogliamo discutere le possibilità offerte da software di calcolo simbolico, in particolare parliamo di Mathematica™, nell'insegnamento della Matematica nelle scuole primarie e secondarie. Dopo un breve excursus sulla ricerca recente in didattica della matematica e sull'importanza del *problem solving* nell'insegnamento della matematica, illustriamo come Mathematica™ possa essere un ottimo strumento didattico, e introduciamo tre applet create con Mathematica™ per illustrare le possibilità di questo strumento.

Indice

1. La Didattica della Matematica

La didattica della matematica ha ormai raggiunto lo *status* di scienza autonoma e riconosciuta, presentando le caratteristiche, fissate da T. Romberg in [28], proprie di una disciplina a sé stante. Non si può negare, infatti, che c'è una nutrita comunità internazionale di ricercatori, i quali indagano tematiche peculiari e comuni; hanno formulato un lessico condiviso; forniscono spiegazioni secondo il principio causa-effetto; infine, hanno perfezionato specifici sistemi di validazione delle proprie asserzioni. Questa disciplina non è "né didattica generale né matematica né, soprattutto, banale ricettario di buon senso. Nulla di peggio di una didattica basata sulla semplice esperienza di insegnamento anche se pluriennale, non legata cioè a profondi studi specifici e soprattutto di ricerca nel settore" [9, p. 27]. Quel che ci proponiamo di fare con questo articolo è aprire un piccolo spiraglio in un ambito di questa disciplina ancora poco indagato in Italia, ovvero la didattica assistita da software di calcolo simbolico; in particolare, ci occuperemo di Mathematica™ della Wolfram Research, ma le nostre considerazioni si applicano anche a diversi altri software. Per cercare di esplicitare al meglio le potenzialità di questo dispositivo didattico, ci pare assai opportuno richiamare l'iter evolutivo della didattica della matematica dagli anni '60 ad oggi. Per questo, riproponiamo l'analisi di Bruno

D'Amore: dalla fase iniziale (1960-1980) di una didattica della matematica A, attraverso una tappa intermedia (1980-2000) di una didattica della matematica B, si è oggi approdati alla didattica della matematica C. D'Amore chiama didattica A quel modo di intendere la didattica della matematica come *docendi ars*, cioé divulgazione dei contenuti matematici, nella quale l'attenzione si concentra sulla fase dell'insegnamento: il bravo docente raggiunge il suo scopo di un efficace acquisizione da parte degli studenti trasfondendo in loro gli argomenti del programma attraverso lezioni interessanti, attività coinvolgenti, situazioni didattiche accattivanti.... (si veda per esempio il lavoro di Dienes [12])[1]Il didatta A ha spiccate doti comunicative e capacità di suscitare interesse, e riesce così a trasferire le conoscenze agli allievi. Studi sulla problematica del *transfert cognitivo* effettuati a partire dagli anni '80 hanno dimostrato, però, che questo *artista della didattica* non sempre ottiene il risultato atteso di un efficace apprendimento da parte del discente. "L'insegnamento, come semplice processo distruzione, appesantito da ipotesi sulla capacità dello studente di assorbire quel che gli si dice bene, non è una concezione: è un'illusione"[23].

Gli esiti fallimentari della Didattica A, concentrata solo sul Sapere e sulla trasmissione dei suoi contenuti, hanno ampliato il campo delle ricerche, facendo fiorire studi in Didattica B. D'Amore definisce la didattica B come epistemologia dell'apprendimento della matematica, ovvero ricerca empirica, in cui la fase centrale è appunto quella dell'apprendimento: si indagano le modalità di costruzione delle conoscenze matematiche dell'allievo. E, richiamandosi a Gérard Vergnaud[32] e a J Kilpatrick[20], attribuisce le basi di questa epistemologia all'ambito del costruttivismo: il processo conoscitivo non è passiva acquisizione, bensì costruzione attiva da parte di colui che apprende, il quale, in continua interazione e adattamento all'ambiente, elabora autonomamente le informazioni e le esperienze. Di qui la centralità del soggetto discente nella ricerca in Didattica B, che sottopone a indagine critica sia le forme di apprendimento dello studente, sia le interazioni e le dinamiche che si instaurano in aula durante la pratica didattica. La didattica della matematica diventa allora "una scienza che si interessa alla produzione e comunicazione delle conoscenze matematiche, e in che cosa questa produzione e questa comunicazione hanno di specifico"[6]. Brousseau, e con lui poi la Scuola francese, è il primo ad evidenziare i limiti della Didattica A, aprendo la via a una nuova concezione della didattica della matematica. Questa scienza fa un'analisi sistemica delle componenti del *triangolo didattico* (docente, studente, Sapere): rintraccia i modi e le condizioni della diffusione delle conoscenze matematiche; esplicita le conseguenze che questa diffusione produce sia sullo studente sia sul Sapere stesso; studia le istituzioni nelle quali avviene la trasmissione delle conoscenze. Ed è finalizzata all'ottimizzazione dei risultati scolastici in matematica: si studiano i modi di costruzione di conoscenza dello studente per organizzare situazioni scolastiche che il più possibile la favoriscano.

Nel 2006 D'Amore conia il termine Didattica C per identificare quella che è l'attuale concezione della didattica della matematica: epistemologia dell'insegnante, ovvero la sua formazione, la sua funzione e i suoi convincimenti. La Didattica A analizza il Sapere e i modi di trasmissione dei suoi contenuti; la Didattica B ha

[1]L'assunto che più o meno esplicitamente circolava in quegli anni era che quanto più è bravo l'insegnante a spiegare, facendo leva sull'attenzione e sulla motivazione dello studente, tanto più quest'ultimo capisce e apprende l'argomento esposto.

ampliato il campo delle ricerche all'insieme delle variabili che determinano la buona riuscita o il fallimento del processo di apprendimento. Insieme hanno aperto la via per "creare buone situazioni di apprendimento"[5], ovvero "per tradurre uno sforzo di insegnamento in un apprendimento avvenuto e consapevole"[11, p. 21]. E hanno permesso l'avvio di una nuova fase di ricerca in didattica della matematica, appunto quella C. Infatti, resta da analizzare il terzo elemento del triangolo didattico "docente, studente, Sapere". Fino a pochi anni fa, non ci si è mai chiesti se e in quale misura l'insegnante influisce sul processo di apprendimento: come, ad esempio, le sue convinzioni hanno un peso sui contenuti da trasmettere e sul modo in cui l'alunno li fa propri? Si pensi, poi, agli effetti di quello che Brousseau ha denominato *contratto didattico*[2]: "In una situazione di insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere il problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti nel modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo e i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto sociale". E ancora, la ricerca ha fatto emergere, attraverso il concetto di *trasposizione didattica*, il complesso passaggio dal sapere matematico al sapere da insegnare al sapere insegnato: il docente adatta la conoscenza matematica (il Savoir Savant[3]) per trasformarla in quella che Chevellard chiama "conoscenza per essere insegnata"[8] e, dunque, poi appresa dai discenti[4]. E poi ancora, si possono citare, quali fattori condizionanti il fenomeno insegnamento-apprendimento, la scelta delle *situazioni didattiche* (situazioni a-didattiche, situazioni didattiche, situazioni non didattiche)[5]; la progressiva appropriazione dei concetti matematici da parte dell'individuo attraverso il passaggio dalle immagini di tali concetti ai modelli e la conseguente formazione di misconcezioni[6]; i vari tipi di ostacoli all'apprendimento della matematica (ontogenetici, didattici, epistemologici)[7]; le difficoltà connesse all'uso di un linguaggio specifico, come appunto quello matematico, e dei suoi diversi registri (la matematica come linguaggio a sé, dunque dotato di una propria sintassi, una propria semantica e una propria pragmatica; la necessità dell'insegnante di esporre i concetti matematici con un linguaggio comprensibile agli studenti, da cui a volte l'uso del *matematichese* in aula; la facilità di confusione fra lingua comune e linguaggio matematico; la

---

[2]Brousseau espone il concetto in [2, 3, 4], teorizzato in seguito compiutamente anche con il contributo di Yves Chevellard

[3]Chevellard così chiama il sapere della ricerca matematica, quello storicizzato, accademico

[4]Particolarmente esplicative di questo concetto sono le parole di D'Amore: "La trasposizione didattica consiste, allora, dal punto di vista dell'insegnante, nel costruire le sue proprie lezioni attingendo dalla fonte dei sapere, tenendo conto delle orientazioni fornite dalle istituzioni e dai programmi (sapere da insegnare), per adattarli alla propria classe: livello degli allievi, obiettivi perseguiti. La trasposizione didattica consiste nell'estrarre un elemento di sapere dal suo contesto (universitario, sociale....) per ricontestualizzarlo nel contesto sempre singolare, sempre unico, della propria classe."[11, p. 40]

[5]Per la teoria delle situazioni facciamo riferimento al testo di Brousseau [5]

[6]Non potendo qui entrare nella delicata questione dei modelli primitivi e dell'origine dei misconcetti, rimandiamo a [11, p. 53-72] e a [35, p. 87-90].

[7]La teoria degli ostacoli, elaborata da Brousseau nel 1976 [1] e sistematizzata poi da Marie Jeanne Perrin Glorian nel 1994 [24], è oggi ritenuta a livello internazionale di fondamentale importanza nella ricerca in didattica della matematica, che continua ad approfondire la tematica degli ostacoli legati specificatamente allo studente, quelli che derivano da una scelta strategica del docente e quelli, invece, connessi alla natura stessa dell'argomento.

ricaduta problematica sulla comprensione della conversione della rappresentazione di un oggetto matematico in una rappresentazione del medesimo oggetto, ma in altro sistema semiotico)[8].

2. Il problem solving

Come sopra esplicitato, abbiamo fatto questi brevissimi e lacunosi cenni alla ricerca in didattica della matematica per addentrarci più agevolmente e più consapevolmente nel tema del *problem solving*, considerato da molti studiosi prioritario in questa disciplina. Nel 1980 Paul Halmos [17] scrive: "In che cosa consiste veramente la matematica? Assiomi (come il postulato delle parallele)? Teoremi (come il teorema fondamentale dell'Algebra)? Dimostrazioni (come la dimostrazione di Gödel dell'indecidibilità)? Definizioni (come la definizione di dimensione di Menger)? Teorie (come la teoria delle categorie)? Formule (come la formula integrale di Cauchy)? Metodi (come il metodo delle approssimazioni successive)? Certamente la matematica non potrebbe esistere senza questi ingredienti; essi sono tutti essenziali. Tuttavia un punto di vista sostenibile è che nessuno di essi è a centro della disciplina, che il motivo principale di esistenza per il matematico è risolvere problemi, e che, dunque, quello in cui consiste veramente la matematica sono problemi e soluzioni". E, prima di lui, David Hilbert [18]: "Finché un ramo di scienza offre un'abbondanza di problemi, allora è vivo; una mancanza di problemi prefigura l'estinzione o l'arresto di uno sviluppo indipendente. Così come ogni impresa umana persegue determinati obiettivi, così anche la ricerca matematica richiede i suoi problemi. È attraverso la soluzione di problemi che il ricercatore mette alla prova la tempra del suo acciaio; egli trova nuovi metodi e nuove prospettive, e conquista un orizzonte più vasto e più libero". George Polya estende la centralità dei problemi in matematica dall'attività di ricerca anche alla pratica dell'insegnamento: "Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano. . . .. Quindi un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionate alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale"[25]. Proprio in seguito agli scritti di Polya, nell'ambito dell'educazione matematica molti studiosi hanno ribadito e approfondito l'importanza di proporre agli studenti situazioni problematiche stimolanti e tratte dalla vita reale.

Purtroppo, però, l'insegnamento praticato nelle nostre scuole per lo più comprime gli studenti nella mera esecuzione di compiti ripetitivi. Solitamente gli insegnanti, quando affrontano un nuovo argomento del programma di matematica, ne mostrano alla lavagna i procedimenti risolutivi e poi propongono agli studenti esercizi che essi devono risolvere nello stesso modo. È, dunque, qui d'obbligo introdurre la distinzione fra problema ed esercizio. Lo studente svolge un esercizio quando per

[8]Per queste tematiche rimandiamo a [11, p. 77-93]

risolverlo si limita ad applicare regole illustrate precedentemente e esaustivamente dall'insegnante. Dunque, la risoluzione non è che la riproduzione di procedimenti già appresi[9]. Per la definizione di problema, invece, riportiamo direttamente le parole di autorevoli studiosi. Karl Duncker, esponente della Psicologia della Gestalt[10], scrive: "Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta e non sa come raggiungerla"[13]. E secondo il didatta Frank Lester [22] un problema è un compito per cui:

- l'individuo o il gruppo che si confronta con esso vuole o ha bisogno di trovare una soluzione;
- non c'è una procedura immediatamente accessibile che garantisca o determini in modo completo le soluzioni;
- l'individuo o il gruppo devono fare uno sforzo per trovare una soluzione.

Infine, citiamo D'Amore, che preferisce il termine di *situazione problematica*, la quale "può dare luogo a problema o esercizio a seconda della situazione didattica", e che il nostro autore così definisce: "situazione d'apprendimento che comporta la risoluzione di un problema, ma concepita in modo tale che gli allievi non possano risolvere la questione per semplice ripetizione o applicazione di conoscenze o competenze acquisite, ma tale che essa necessiti della formulazione di ipotesi nuove" [11, p. 95-96].

Di qui una profonda differenza fra un'attività didattica concentrata sullo svolgimento di esercizi e quella, invece, basata sulla risoluzione di problemi. Nella prima, gli alunni si limitano a eseguire esercizi, che l'insegnante assegna loro per verificare il grado di apprendimento in seguito alle sue spiegazioni. Nell'altra, l'insegnante sceglie di sottoporre ai propri studenti situazioni problematiche per la risoluzione delle quali essi devono impegnarsi in un processo produttivo. Ciascun soggetto, in tale processo di *problem solving*, è influenzato da fattori cognitivi, metacognitivi ed emozionali. Infatti, mette in gioco il proprio bagaglio di conoscenze relative all'ambito cui appartiene quel problema che sta studiando; fa uso delle strategie che conosce (le euristiche); prende in continuazione decisioni su come gestire le risorse che ha a disposizione; valuta il grado di difficoltà del compito e lo mette a confronto con le proprie possibilità di affrontarlo; ha proprie convinzioni personali (su se stesso, sul problema nel quale si sta cimentando, sugli obiettivi che si pone nello svolgere questa attività, sulla matematica in generale) e un proprio retroscena affettivo-volitivo: "Lo stesso pensiero ha origine non da un altro pensiero, ma dalla sfera delle motivazioni della nostra coscienza, che contiene le nostre passioni e i nostri bisogni, i nostri interessi e impulsi, i nostri affetti e le nostre emozioni" [33].

Specialmente negli alunni della scuola primaria e secondaria inferiore i fattori affettivi, quali la motivazione, la determinazione e il modo di porsi nei confronti della matematica, giocano un ruolo fondamentale. Sono, infatti, questi gli anni in cui si formano le competenze di base in matematica: i bambini si avvicinano alla matematica come disciplina a sé e, per comprendere i suoi oggetti, devono impararne il linguaggio e l'apparato formale (come si sa, entrambi questi aspetti sono tutt'altro

[9]Per un approfondimento di tale tendenza nella pratica didattica italiana rimandiamo a [34, 35].

[10]Questa disciplina ha dato non pochi contributi per la teorizzazione del *problem solving*, benché in essa si preferisse la definizione di pensiero produttivo, in contrapposizione al pensiero riproduttivo. Gli psicologi della Gestalt, evidenzia Gaetano Kanizsa, mirano "a stabilire la fenomenologia di questi processi produttivi e le caratteristiche che li distinguono da quelli meramente riproduttivi, a individuare le condizioni che li favoriscono e quelle che li ostacolano, a localizzare i momenti decisivi del processo, quando si sprigiona il lampo della comprensione"[19]

che intuitivi) [21]. L'uso continuo di simboli e formule, unito ad attività meramente mnemoniche e all'eccessiva astrazione non fanno che suscitare negli scolari l'immagine della matematica come materia scolastica difficile e poco comprensibile, che nulla ha a che vedere con la realtà, tantomeno quella vicina alla loro esperienza. Dunque, è importante che nella pratica didattica in aula l'insegnante metta in risalto i collegamenti fra l'argomento matematico trattato e l'ambiente, inteso in senso ampio, in cui gli alunni vivono. Proponendo loro situazioni problematiche attinenti alla vita reale e nelle quali essi possano calarsi, i discenti si sentiranno stimolati a perseguire volentieri e con solerzia l'obiettivo cognitivo perché si saranno resi conto dell'utilità pratica della matematica. La contestualizzazione dei contenuti, i quali dall'*iperuranio* di platonica memoria vengono utilizzati come efficace strumento di intervento in questo nostro mondo *sensibile* (per continuare nella metafora filosofica), da un forte impulso alla motivazione, alla volontà di raccogliere le sfide del problema proposto e alla tenacia nel perseguimento della soluzione.

Questo modo di impostare l'attività didattica (dalla scuola primaria a quella secondaria di di secondo grado) facilita la costruzione cognitiva dei concetti matematici ed esercita le abilità strategiche per la risoluzione di problemi. Dunque, favorisce l'acquisizione da parte degli studenti della "competenza in Matematica", la quale "si centra nella disciplina della Matematica... L'allievo entra in contatto con saperi specifici... che la società ha inglobato nelle conoscenze riconosciute come base per un dignitoso ingresso nel suo interno... La competenza è qui vista all'interno dello specifico ambito scolare" [10, p. 81]. Ma non solo. Essi sviluppano gradualmente anche la "competenza matematica", ovvero, si potrebbe dire, imparano a guardare la realtà con gli *occhi della matematica*. "La competenza matematica è quando un individuo vede, interpreta e si comporta nel mondo in un senso matematico" [10, p. 81], fa un'analisi razionale dei dati che provengono dall'esterno e, sulla base di tale analisi, interagisce con l'ambiente, con la società. Al di là delle significative implicazioni antropologiche e sociologiche di ciò, che non sono nostra pertinenza indagare, non ci pare fuori luogo ricordare che Galileo Galilei, il padre della scienza moderna, nel 1623 dà alle stampe il suo Saggiatore [15], nel quale paragona l'universo ad un "grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, ma non si può intendere se prima non si impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri né quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i carateri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto".

Fanno parte del magistero educatico e formativo della scuola, a partire già dal quinquennio dell'istruzione primaria, sia la trasmissione dei concetti base del sapere matematico[11]e l'esercizio per lo sviluppo delle abilità di calcolo (ad esempio, la memorizzazione della tavola pitagorica, le operazione con i numeri natuali, l'elevazione a potenza, il calcolo delle espressioni aritmetiche...), sia il continuo stimolo delle capacità razionali, logiche e strategiche degli alunni, sottoponendo loro situazioni problematiche e assistendoli nella risoluzione[12].

---

[11]Le attività di insegnamento, come appunto si diceva sopra, devono essere impostate in modo che tutti i componenti del gruppo classe possanno far propri gli oggetti matematici.

[12]Riprendendo ancora Polya, il bravo insegnante "risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionata alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune".

3. Mathematica™ per la didattica della matematica

L'insegnante ha oggi a disposizione uno straordinario dispositivo didattico, il computer, che, attraverso l'utilizzo di opportuni programmi, rafforza la *competenza in matematica* degli studenti senza oberarli e deprimere la loro motivazione e il loro interesse sotto il tedioso gravame delle mere procedure esecutive (in particolare i calcoli), lasciando così tempo ed energie all'attività di *problem solving*. Come accennato, specialmente l'esecuzione *manuale* dei calcoli non solo rallenta, ma anche danneggia l'insegnamento/apprendimento della matematica sia dal punto di vista della motivazione del discente, sia riguardo all'efficacia di esempi esplicativi, sia in riferimento al legame fra matematica e vita reale:

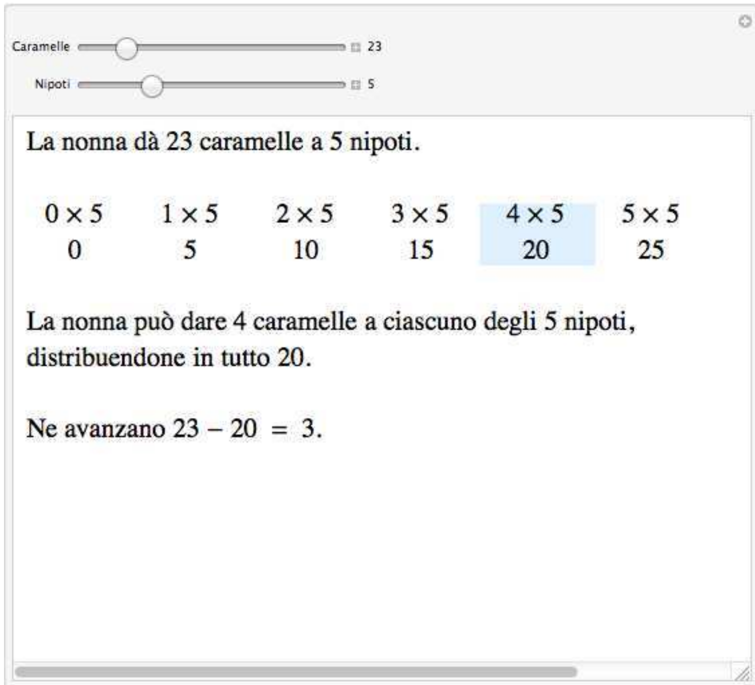
(1) L'acquisizione delle procedure di calcolo (dalle quattro operazioni con i numeri interi insegnate ai bambini della scuola primaria agli esercizi di trigonometria o i primi cenni di analisi matematica per gli studenti di scuola media superiore) richiede tempo, fatica e pazienza. È attività di per sé non stimolante e per lo più percepita dagli alunni come lontana dalla propria realtà quotidiana, che impegna pesantemente per lunghi anni di scuola.
(2) L'uso di esempi è essenziale per la spiegazione (strumento didattico per l'insegnante) e conseguente comprensione (successo cognitivo per gli studenti) delle nozioni matematiche. Tuttavia, qualsiasi esempio richiede calcoli per essere sviluppato e fare calcoli comporta che gli studenti si concentrino sull'esecuzione degli algoritmi, stando bene attenti a non sbagliare (anche un solo errore di calcolo compromette la correttezza del risultato dell'esempio, dunque la validità e utilità dell'esempio stesso). Ciò distoglie l'attenzione degli studenti dal concetto/oggetto matematico cui era finalizzato, nelle intenzioni dell'insegnante, l'esempio, e a farne le spese è molto spesso la comprensione/acquisizione del sapere matematico.
(3) Per come è impostato il curricolo di matematica della nostra scuola, gli studenti difficilmente possono cogliere l'utilità pratica della matematica, il suo prezioso e insostituibile legame con la realtà, sia essa circoscritta alla nostra vita quoditiana sia estesa alla società nel suo insieme e al mondo intero. Basterebbe parlare di semplici problemi di natura finanziaria (es. interessi semplici e composti), di tipo ingegneristico (es. accelerazione centripeta di un'automobile che percorre un circuito), di analisi dati (es. dati meteorologici) per destare un maggiore interesse negli studenti. D'altra parte problemi di questo tipo sono spesso inaccessibili durante una lezione in classe a causa del fatto che il loro svolgimento richiede necessariamente calcoli complicati e molto lunghi, e anche nel caso tali calcoli si possano svolgere in un tempo ragionevole, difficilmente è possibile fare più di un esempio.

Le conseguenze negative del fare calcoli che distolgono l'attenzione dal vero obiettivo possono essere evitate mediante l'uso di un software che renda possibile l'esecuzione di numerosi esempi senza gravarli dal peso di calcoli, e che allo stesso tempo proponga i problemi mediante un'interfaccia immediata. Si noti bene: una cosa è imparare a fare le quattro operazioni alle scuole elementari, le operazioni con i numeri relativi o razionali alle scuole medie, a conoscere le funzioni trigonometriche e le loro proprietà alle scuole superiori, questo non è in discussione. Altra cosa è, per esempio, imparare a dividere numeri con 3/4 cifre oppure risolvere complicati esercizi di trigonometria, si pensi alle varie formule di bisezione, prostaferesi e così via. Un modo molto efficace per formulare esempi è il software di calcolo scientifico Mathematica™ di Wolfram Research. Oltre a essere estremamente flessibile e adatto per la didattica a qualsiasi livello, dalla scuola primaria all'università, permette la creazione di pagine web contenenti il materiale didattico in forma di applet. Nella sezione successiva descriviamo tre esempi e riproduciamo tre possibili schermate delle applet; è possibile visualizzare e utilizzare le applet alla pagina `http://mox.polimi.it/~ gianni/teaching.html`.

4. Problemi.

In questa sezione proponiamo tre esempi relativi rispettivamente alla scuola primaria, secondaria inferiore e secondaria superiore. Hanno un valore puramente esemplificativo al fine di illustrare le possibilità offerte da un'*applet* di tipo didattico. Se ne possono sviluppare molti altri su questi stessi argomenti o anche su argomenti diversi.

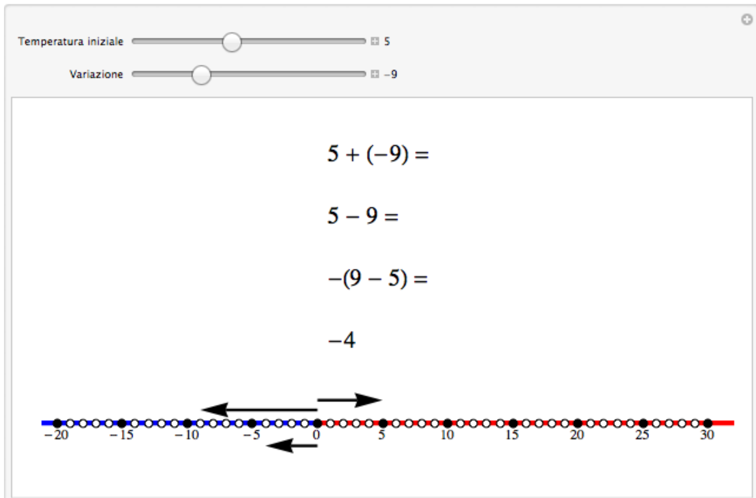
4.1. **La divisione, ovvero la nonna distribuisce le caramelle.** Le divisioni sono sicuramente l'operazione aritmetica che crea più problemi agli insegnanti delle scuole elementari. Due sono le difficoltà da affrontare: la spiegazione del significato stesso di divisione e l'algoritmo di calcolo. L'insegnante può introdurre il classico problema della nonna che ha un pacchetto di caramelle e vuole distribuirle ai nipoti. Per evitare litigi, ogni nipote deve ricevere lo stesso numero di caramelle. Se avanza qualche caramella, la mangerà la nonna. Un modo per introdurre il problema è il seguente: la nonna inizia a verificare che ci sia almeno una caramella per nipote. Se la risposta è positiva, allora inizia a distribuire questa prima caramella. Poi, controlla se le rimangono caramelle a sufficienza per distribuirne una a nipote. Se sì, distribuisce la seconda caramella. E così via, finché le rimangono meno caramelle che nipoti. Questo può essere immediatamente visualizzato con la *applet*, della quale l'immagine successiva è un esempio.



Lo scolaro può muovere con il mouse i cursori, che determinano il numero delle caramelle e dei nipoti, e vedere, ogni volta in tempo reale, la soluzione del problema. Ovviamente si presuppone che l'alunno conosca le tabelline - qui le si danno per scontate, non si vuole prescindere da esse nel senso di non considerarle essenziali nel bagaglio conoscitivo di ciascuno di noi -, tuttavia l'uso di questa *applet* focalizza l'attenzione sul problema in esame, ossia le divisioni. Tre sono i vantaggi, a nostro avviso molto importanti, di questo sistema:

(1) l'utente si risparmia lo sforzo mnemonico relativo alle tabelle di moltiplicazione, non perdendo così tempo nei calcoli e evitando errori computazionali;
(2) l'esempio può essere esteso *seduta stante* a cifre maggiori della decina (quanti studenti conoscono le tabelle di moltiplicazione per numeri superiori al 10?);
(3) l'interazione dinamica e immediata con la *applet* incentiva la motivazione e stimola le capacità cognitive degli studenti.

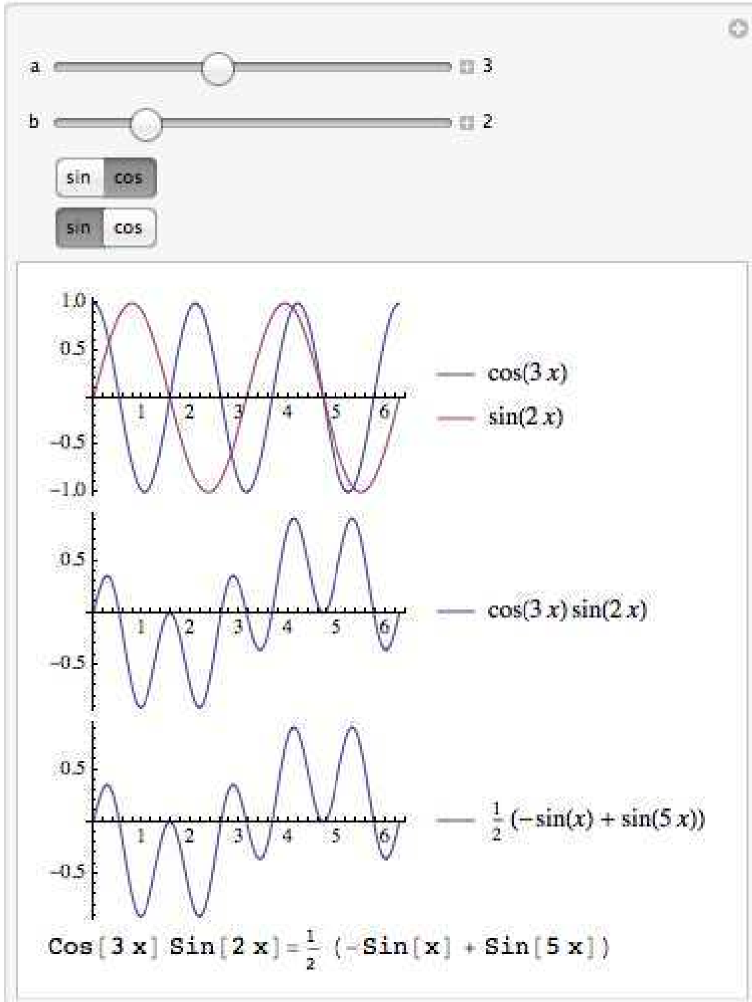
4.2. **Somma di numeri relativi, ovvero le temperature.** Consideriamo ora la somma (ma il discorso vale indifferentemente per ciascuna delle altre operazioni) di numeri relativi. Si può proporre agli studenti questo problema: se ora ci sono 5 gradi e le previsioni del tempo annunciano che durante la notte la temperatura scenderà di 9 gradi, che temperatura dobbiamo aspettarci domani mattina? La *applet* mostra prima l'operazione in forma di addizione: dobbiamo sommare alla temperatura iniziale la variazione, che è negativa visto che stiamo pensando a un calo delle temperature, quindi abbiamo $5+(-9)$. Poi, semplifichiamo l'operazione in $5-9$, quindi, visto che 5 è minore di 9, cambiamo l'espressione in $-(9-5)$ e, infine, eseguiamo l'operazione giungendo al risultato. L'operazione è anche mostrata con l'aiuto di frecce. La *applet* modifica la spiegazione a seconda del caso che si presenta, ossia a seconda del segno della temperatura iniziale e della variazione, e a seconda della loro grandezza relativa.



Anche in questo caso lo studente può creare rapidamente qualsiasi scenario muovendo i cursori *Temperatura iniziale* e *Variazione*, ottenendo immediatamente la procedura di calcolo e avendo, dunque, l'opportunità di acquisire facilmente familiarità con la somma di numeri relativi. Oltre alla canalizzazione dei fattori affettivi (motivazione nello svolgere questa attività, determinazione nel perseguirne l'obiettivo, atteggimento positico e sereno nei confronti della matemtica) verso l'obiettivo cognitivo appena citato, riteniamo che si raggiungano altri due effetti positivi:

(1) l'utente ritrova istantaneamente la corretta procedura di calcolo e la corrispondente rappresentazione grafica senza il rischio di commettere erorri nei calcoli;
(2) l'esempio può essere esteso facilmente alle altre operazioni con numeri relativi e anche a numeri in un intervallo differente dall'esempio con le temperature.

4.3. **Prodotto di seni e coseni.** Anche le formule trigonometriche possono essere rese più interessanti. Consideriamo, ad esempio, la formula di moltiplicazione $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$ e le analoghe forme per il prodotto seno per coseno e coseno per coseno. La seguente *applet* permette di visualizzare in modo immediato i grafici di $f(ax)$ e $g(bx)$, dove f e g sono seno o coseno, da scegliersi con i pulsanti visualizzati in figura, mentre a e b sono interi da scegliere con i cursori. La *applet* mostra anche il grafico del prodotto delle due funzioni e il grafico della funzione ottenuta con la formula di moltiplicazione (ovviamente identico al precedente).



Qui, come negli esempi precendeti, lo studente può interagire con la *applet* e vedere in tempo reale i risultati, facendo diventare sua l'idea che il prodotto di due seni/coseni può essere scritto come una combinazione lineare di seni/coseni. E ritroviamo gli effetti positivi sia in termini di ricaduta sullo stimolo della motivazione e dell'interesse del discente, sia dal punto di vista della correttezza del procedimento (lo studente ottiene istantaneamente la formula corretta e la rappresentazione grafica delle funzioni, sempre evitando di sbagliare i calcoli), sia, infine, relativamente alla duttilità dell'esempio (perché può essere agevolmente esteso anche alle altre formule trigonometriche).

5. Conclusione

Abbiamo provato a fare giocare alcuni scolari di quarta elementare con una pagina web contenente il software descritto in Sezione 4.1. Il risultato è stato a nostro avviso molto interessante. Innanzitutto, abbiamo osservato che questo tipo di lezione risulta molto più accattivante di una lezione tradizionale; di conseguenza non è stato difficile coinvolgere i bambini nell'attività didattica. Inoltre, abbiamo potuto prendere atto dell'effetto, da noi giudicato fondamentale, che i bambini hanno avuto la possibilità di svolgere un gran numero di problemi in breve tempo, familiarizzandosi rapidamente con il tema trattato (la divisione appunto). Infine, ci pare di aver raggiunto la finalità cognitiva che ci proponevamo: al termine dell'esperimento i bambini sembravano avere compreso il concetto di divisione e sembravano anche avere acquisito l'algoritmo di calcolo presentato.

Queste osservazioni sono il frutto di un singolo e circoscritto esperimento. Naturalmente, per testarne a pieno le potenzialità e l'efficacia, occorrerebbe predisporre un numero significativo di questo tipo di *applet* e metterle alla prova con studenti dei tre gradi di scuola. Numerosi esempi (in inglese e con tematiche più tipiche delle scuole anglosassoni) sono già disponibili al sito Wolfram `http://www.wolfram.com/solutions/precollege/materials.html`. Un test più approfondito di questo metodo di insegnamento consentirebbe di convalidarne anche numerosi altri vantaggi. Ne citiamo qui di seguito alcuni, che, a nostro avviso, meriterebbero una trattazione approfondita:

(1) questi software consentono a teoria e sperimentazione di intrecciarsi creando virtualmente moltissime situazioni problematiche nelle quali il discente può calarsi, mettendo in gioco le proprie capacità razionali, logiche e strategiche;
(2) il confronto dello studente con la situazione problemtica è immediato e diretto (sopratutto grazie all'interfaccia intuitiva e di facile utilizzo di questi programmi), e, dunque, lo studente si assume la responsabilità dell'apprendimento, attivando non solo le proprie abilità cognitive, ma anche le euristiche che conosce, le proprie convinzioni su sé stesso e sul compito che sta affrontando, le proprie teorie del successo, la propria visione della matematica e il proprio "retroscena affettivo-volitivo", orchestrando strategicamente tutti questi fattori ai fini della soluzione;
(3) l'insegnante può sottoporre alla scolaresca un numero pressoché infinito di *ambienti simulati*, scegliendo di volta in volta quelli che ritiene più adeguati all'argomento trattato e più efficaci a raggiungere la finalità cognitiva che si prefigge, guidando e stimolando ciascuno nel processo personale risolutivo ("egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale");
(4) tutti i componenti del gruppo classe condividono possono condividere lo stesso problema e discuterlo sotto la guida dell'insegnate (figura discreta, ma essenziale), ma ciascuno è protagonista e artefice di un proprio percorso risolutivo;
(5) le *applet* sono dispositivo didattico adatto a tutte le fasi del fenomeno insegnamento/apprendimento: spiegazione dell'insegnante, rielaborazione personale dello studente, esercizio e verifica dell'argomento;
(6) l'estrema versatilità delle *applet* consente di formularne per un gran numero di argomenti matematici, coadiuvando le istituzioni scolastiche a ogni livello;
(7) la produzione delle *applet* è operazione semplice e che richiede poco tempo;
(8) l'instrinseca vocazione di questi programmi al *problem solving* li rende eccellenti strumenti per favorire una formazione degli studenti, di qualunque ordine scolastico, non solo dal punto di vista del sapere matematico, ma anche e soprattutto relativamente alla *competenza matematica.*

L'esito positivo dell'esperimento sulla divisione e l'importanza dei punti appena citati, ci sprona ad auspicare una sperimentazione su larga scala di questo tipo di *applet.*

Riferimenti bibliografici

[1] G. Brousseau, *Les obstacles épistémologiques et les problems en mathématiques,* La problématique et lenseignement de la mathématique, Louvain-la-neuve, France 1976

[2] G. Brousseau, *Les échecs électifs en mathématiques dans lenseignement élémentaire, Revue de laryngologie, otologie, rhinologie, vol. 101, n° 3-4, pp 107-131*, 1980

[3] G. Brousseau, *Léchec et le contrat, Recherches, 141, pp 177-182, 1980*

[4] G. Brousseau, J. Peres, *Le cas Gaël*, Université de Bordeaux I, Irem, 1981

[5] G. Brousseau, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques,* Recherches en Didactiques des Mathématiques, 7(2), 33-115*,* 1986

[6] G. Brousseau, *La tour de Babel.* Etude en didactique des mathématiques, Université de Bordeaux II : irem. 17 p., 1989

[7] S.I. Brown, M.I. Walter, The Art of Problem Posing, Hillsdale, Lawrence Erlbaum, 2005

[8] Chevellard Y., *La trasposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné,* Revue française de pédagogie. Volume 76, 1986. pp. 89-91

[9] B. D'Amore, *Elementi di Didattica della Matematica,* Pitagora Editrice, 1999

[10] B. D'Amore B., M.I. Fandino Pinilla, *Le didattiche disciplinari*, Erickson, 2007

[11] B. DAmore, S. Sbaragli*, Principi di base di Didattica della matematica*, Pitagora Editrice, 2011

[12] Z. P. Dienes, La mathématique vivante. Paris: OCDL 1972

[13] K. Duncker, *Psychologie des produttive Denkens.* Berlin: Springer 1935

[14] J.H. Flavell, Metacognitive aspects of problem solving. In L.B. Resnick (ed.) The Nature of Intelligence. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 231-235, 1976

[15] G. Galilei, *Il Saggiatore*, 1623

[16] D. D. Guttenplan, *Closing Gap Between Modern Life and Math Curriculum*, New York Times, February 10, 2013

[17] P. Halmos, *The heart of mathematics.* American Mathematical Monthly, 87, 519-524, 1980

[18] D. Hilbert, *Mathematical Problems.* Bullettin of American Mathematical Society, 8, 437-479, 1902

[19] G. Kanizsa, *Il problem-solving nella psicologia della Gestalt*, In Mosconi G., DUrso V. (a cura di) La soluzione di problemi. Firenze: Giunti-Barbera, 35-38, 1973

[20] J. Kilpatrick, *What constructivism might be in mathematics education*, Proceedings of PME XI - Montreal, 1987

[21] G. Kulm, *Investigaciòn en torno a las Actitudes matèmaticas.* In "Antologia del Seminario de Investigaciòn Educativa", vol. 1, Mèxico, UPN (1986)

[22] F. Lester, *Trends and issues in mathematical problem solving research.* In: R. A. Lesh, M. Landau (eds.) Acquisition of mathematics concepts and processes. New York-London: Academic Press, 1983

[23] L. E. Moreno Armella, Epistemologia ed Educazione Matematica. La matematica e la sua didattica, 1, 43-59 1999

[24] M.-J. Perrin Glorian, *Théorie des situation didactiques: naissance, développement, perspectives*, La Pensée Sauvage éditions Grenoble, 1994

[25] G. Polya, *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press, 1945

[26] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press, 1968

[27] G. Polya, Mathematical Discovery, 1962

[28] T. Romberg, *Necessary ingredients for a theory of mathematics education.* In H. G. Steiner & A. Vermandel (Eds.), Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education. Proceedings of the 2nd TME Conference, Bielefeld, 1988

[29] A.H. Schoenfeld, Episodes and executive decisions in mathematical problems-solving, in R. Lesh, M. Landau (eds.) Acquisitions of mathematical concepts and Processes, New York, NY: Academic Press, 345-396

[30] A.H. Schoenfeld, Whats all the fuss about metacognition? in A.H. Schoenfeld, (ed.) Cognitive science and Mathematics Education, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 189-215, 1987

[31] E.A. Silver, Knowledge organization and mathematicsl problem solving in F. Lester, J. Garofalo (eds.). Mathematical problem solving: Issues in reseach, Philadelphia: Franklin Institute Press, 15-25, 1982

[32] (Vergnaud, G. (1990a). Epistemology and psychology of mathematics education. "In: P. Nesher, J. Kilpatrick (des.) (1990). Mathematics and cognition." Cambridge (MASS): Cambridge University Press.)

[33] L.S. Vygotskij L.S. Myslenine i rec. Moskva-Leningrad; Socezik, 1934 (trad. it. Pensiero e linguaggio, Giunti-Barbera 1966)

[34] R. Zan, *I modelli concettuali di problema nei bambini della scuola elementare*, LInsegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 14 (7,9), 659-677, 807-840, 15 (1), 39-53., 1991-1992

[35] R. Zan, *Difficoltà in Matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, Springer, 2007

Dipartimento di Matematica e MOX, Politecnico di Milano, piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano

E-mail address: gianni.arioli@polimi.it

MOX Technical Reports, last issues

Dipartimento di Matematica "F. Brioschi",
Politecnico di Milano, Via Bonardi 9 - 20133 Milano (Italy)

22/2014 Arioli, G.
Insegnare Matematica con Mathematica

21/2014 Artina, M.; Fornasier, M.; Micheletti, S.; Perotto, S.
The benefits of anisotropic mesh adaptation for brittle fractures under plane-strain conditions

20/2014 Artina, M.; Fornasier, M.; Micheletti, S.; Perotto, S.
Anisotropic mesh adaptation for crack detection in brittle materials

19/2014 L.Bonaventura; R. Ferretti
Semi-Lagrangian methods for parabolic problems in divergence form

18/2014 Tumolo, G.; Bonaventura, L.
An accurate and efficient numerical framework for adaptive numerical weather prediction

17/2014 Discacciati, M.; Gervasio, P.; Quarteroni, A.
Interface Control Domain Decomposition (ICDD) Method for Stokes-Darcy coupling

16/2014 Dede, L.; Jaggli, C.; Quarteroni, A.
Isogeometric numerical dispersion analysis for elastic wave propagation

15/2014 Esfandiar, B.; Porta, G.; Perotto, S.; Guadagnini, A;
Anisotropic mesh and time step adaptivity for solute transport modeling in porous media

14/2014 Dassi, F.; Formaggia, L.; Zonca, S.
Degenerate Tetrahedra Recovering

13/2014 Ballarin, F.; Manzoni, A.; Quarteroni, A.; Rozza, G.
Supremizer stabilization of POD-Galerkin approximation of parametrized Navier-Stokes equations