MOX–Report No. 16/2007

Modellistica Matematica e Calcolo Scientifico

ALFIO QUARTERONI

MOX, Dipartimento di Matematica "F. Brioschi"
Politecnico di Milano, Via Bonardi 9 - 20133 Milano (Italy)

mox@mate.polimi.it http://mox.polimi.it

Modellistica Matematica e Calcolo Scientifico

Alfio Quarteroni
MOX, Politecnico di Milano
e CMCS, Ecole Polytechnique Fédérale (EPFL), Lausanne.

Sunto Nel seguito verrà discusso il ruolo della modellistica matematica e del calcolo scientifico nelle scienze applicate, la loro rilevanza come strumenti di simulazione, indagine e supporto alle decisioni, il loro contributo all'innovazione tecnologica. Si citeranno alcuni risultati conseguiti e le prospettive che si aprono in svariati settori quali l'industria, l'ambiente, le scienze della vita e lo sport.

Introduzione

La modellistica matematica mira a descrivere in termini matematici i molteplici aspetti del mondo reale e la loro dinamica evolutiva. Essa costituisce la terza colonna portante nelle scienze e nell'ingegneria, a completamento delle due più tradizionali che sono l'analisi teorica e la sperimentazione. Oggi la modellistica matematica è ampiamente consolidata in svariati settori, ad esempio quello industriale e ambientale, mentre sta diventando sempre piu' evidente il potenziale contributo che essa può apportare in numerosi altri ambiti.

Una ragione del crescente successo della modellistica matematica è da ascrivere allo sviluppo impetuoso del calcolo scientifico, quella disciplina che consente di tradurre un modello matematico (risolubile in forma esplicita solo in rarissime situazioni) in algoritmi che possono venire trattati e risolti da calcolatori di potenza sempre più elevata.

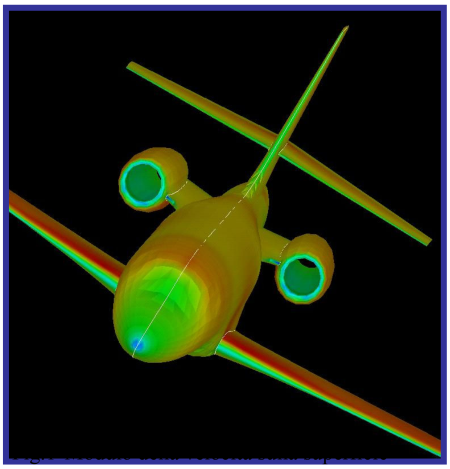
I modelli matematici si ottengono spesso per astrazione. Peraltro, l'innovazione richiede flessibilità, la flessibilità richiede astrazione, il linguaggio dell'astrazione è la matematica. La matematica, tuttavia, non è solo linguaggio, essa aggiunge valore: approfondisce la conoscenza, ricerca soluzioni ottimali, progetta algoritmi efficienti. Innovazione tecnologica e matematica possono dunque dar vita ad un processo di interazione virtuoso.

Il Calcolo Scientifico per l'Innovazione Tecnologica

I modelli matematici offrono nuove possibilità per dominare la crescente complessità delle tecnologie industriali; esplorando rapidamente nuove soluzioni, permettono di accelerare i cicli di innovazione.
Sin dall'inizio degli anni '60, l'analisi numerica, ovvero la disciplina che consente la risoluzione di equazioni matematiche (algebriche, funzionali, differenziali ed integrali) attraverso algoritmi, ha avuto un ruolo guida nella risoluzione di problemi associati a modelli matematici derivanti dall'ingegneria e dalle scienze applicate.
Sulla scia di questo successo, nuove discipline si sono aperte all'uso della modellistica matematica, quali ad esempio la tecnologia dell'informazione e della comunicazione, la bioingegneria, l'ingegneria finanziaria.
La straordinaria complessità di queste applicazioni ha spronato i matematici a riconsiderare il loro approccio ponendo al centro della scena il problema in quanto tale e cercando modelli e algoritmi per trovarne soluzioni. Questo cambio di paradigma ha determinato l'avvento del calcolo scientifico, il cui scopo consiste nella costruzione di algoritmi migliori per una simulazione efficace ed accurata nonché per l'ottimizzazione di problemi di interesse reale. Combinato con l'aumento vertiginoso della velocità dei computer, cio' puo' rappresentare il fattore discriminante fra complessità abbordabili e non.
L'obiettivo ultimo del calcolo scientifico è quello di realizzare modelli versatili e affidabili, accurati entro soglie dettate dalla specifica classe di problemi da trattare, verificati su una

grande e significativa varietà di casi test, analogici o sperimentali, per i quali si possa disporre di soluzioni di riferimento.
Oltre a concetti universali che un modello matematico deve riprodurre, quali ad esempio la conservazione della massa e dell'energia di un fluido, del momento d'inerzia di una struttura, etc., per una simulazione numerica di successo è necessario stabilire quale livello di dettaglio ha senso inserire nelle diverse componenti di un modello e quali semplificazioni apportare in modo da favorire una sua integrazione con modelli diversi.
Modelli che simulino realtà molto complesse dovrebbero anche tener conto dell'incertezza che deriva da insufficiente disponibilità dei dati che alimentano il modello stesso. L'analisi del rischio, che deriva dall'incertezza e dall'esposizione alla "sconfitta" (sia essa riduzione del profitto, detrimento all'ambiente, compromissione della salute, o altro) è un'ulteriore proprietà che un buon modello dovrebbe possedere.
Modelli che godano di queste proprietà saranno usati per prevedere processi naturali, biologici, ambientali, per comprendere meglio la fisica di fenomeni complessi e contribuire alla progettazione di prodotti e tecnologie innovative.

Un aspetto importante nel calcolo scientifico è rappresentato dalla cosiddetta fluidodinamica computazionale (in inglese CFD), la disciplina che mira a risolvere al calcolatore i problemi governati da fluidi. Oggi la CFD viene usata per comprendere meglio la fisica dei fluidi, ma fornisce anche un contributo irrinunciabile alla progettazione in numerosi ambiti industriali. Lo scopo è quello di ridurre il ciclo temporale necessario per la concezione di un nuovo prodotto (ad esempio un aereo, un'automobile o, più semplicemente, un nuovo attrezzo o indumento per sport da competizione. Cio' assicura un vantaggio potenziale alle aziende, consentendo loro di ridurre i costi ricorrendo sempre di meno alle onerosissime prove nella galleria del vento o nel bacino di carena, ma anche risparmiando tempo prezioso nella fase di sviluppo.



di un aereo

Nel settore aerospaziale, la CFD trova numerosissime applicazioni. Ad esempio si usano modelli numerici basati sulle equazioni del flusso a potenziale, oppure su quelle piu' sofisticate di Eulero o di Navier-Stokes, per l'analisi aerodinamica dei profili alari o dell'intera fusoliera, per ottimizzare le prestazioni (riducendo la resistenza al moto), ma anche per incrementare la sicurezza, o ridurre l'inquinamento atmosferico e acustico. La simulazione si accompagna spesso al controllo e all'ottimizzazione, con l'obiettivo di progettare dispositivi o aerei che soddisfino criteri prestabiliti: maggiore affidabilità strutturale, migliore performance aerodinamica, minor impatto ambientale grazie alla riduzione di emissioni di rumore nel caso di aerei commerciali, massimizzazione della velocità e miglioramento della manovrabilità nel caso di aerei militari.
La risoluzione di questi problemi richiede algoritmi di ottimizzazione multi-obiettivo (di tipo deterministico, stocastico o genetico). Sempre nell'ambito aeronautico, modelli di propagazione elettromagnetica servono per simulare campi elettromagnetici esterni al fine di evitare che essi interferiscano in modo dannoso con quelli generati dai numerosissimi circuiti elettronici che fanno parte integrante degli impianti e della strumentazione di bordo.

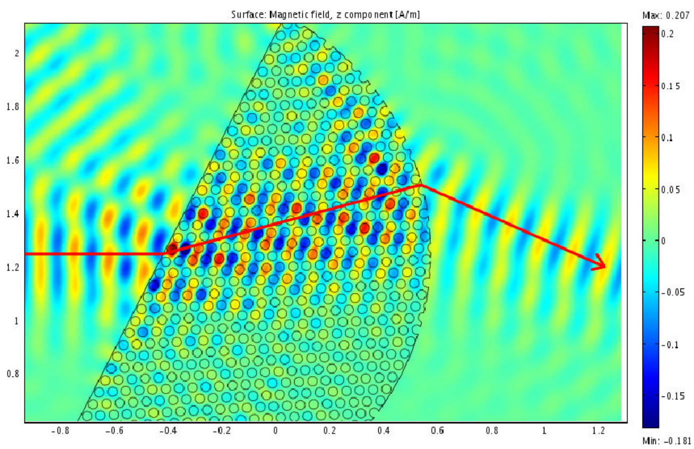


Fig.2 Elementi ottici diffrattivi: rifrazione di un'onda elettromagnetica da parte di un reticolo di allumina

Si impiegano modelli per simulare gli sforzi e le deformazioni di componenti sensibili

dell’aereo (per la simulazione dell’analisi dell’affaticamento dei materiali), con l’obiettivo di migliorare la stabilità strutturale e quella dinamica, attraverso la simulazione numerica dell’interazione fra fluido e struttura.
Analisi simili sono effettuate nell’industria automobilistica, dove la simulazione numerica entra ormai virtualmente in tutti gli aspetti della progettazione e della produzione dei veicoli. Si usano modelli per la simulazione della combustione interna ai motori allo scopo di consumare meno carburante, migliorare la qualità delle emissioni, ridurre il rumore. Inoltre, il miglioramento delle prestazioni, la sicurezza, il comfort richiedono la risoluzione di equazioni della dinamica dei fluidi esterni ed interni, dell’aero-elasticità, della dinamica delle vibrazioni aero-acustiche, dello scambio termico, della cinetica chimica per la combustione, delle onde d’urto (si pensi alla fase di apertura di un air-bag), della meccanica delle strutture in regime di grandi sforzi e grandi deformazioni (per simulare le conseguenze dovute ad impatti).
L’industria chimica fa uso di modelli matematici per la simulazione di processi di polimerizzazione, stampaggio o estrusione, per materiali a reologia complessa, dove l’analisi *macro* (tipica della meccanica dei continui) deve coniugarsi a quella *micro*, più adatta a descrivere le delicate e complesse leggi costitutive di materiali con nanostruttura. Ciò richiede lo sviluppo di tecniche di indagine e di algoritmi multiscala, capaci cioè di descrivere e catturare lo scambio di processi meccanici, termici e chimici, fra scale spaziali notevolmente eterogenee.
Nell’industria elettronica la simulazione delle equazioni di deriva-diffusione, idrodinamiche, di Boltzmann o di Schroedinger, costituisce uno strumento decisivo per progettare circuiti integrati sempre più piccoli e veloci, con funzionalità crescente e con consumi sempre più ridotti (fondamentali ad esempio nelle molteplici applicazioni della telefonia mobile).
Algoritmi efficienti servono inoltre per la codifica e la decodifica di messaggi fra multi-utenti.

Modellare il Tempo

Da sempre l’uomo ha coltivato l’ambizione di prevedere il tempo che farà. Il problema della previsione meteorologica a breve scala (giornaliera o settimanale), di enorme rilevanza pratica, negli ultimi decenni si è venuto collegando in modo sempre più stretto ai problemi della previsione su grande scala, ovvero la previsione dell’evoluzione del clima nonché della previsione dei livelli di inquinamento atmosferico per i prossimi decenni o, addirittura, per un intero secolo.
Fortunatamente in natura esistono normali variazioni climatiche su scala regionale che obbediscono a leggi fisiche e vengono pertanto descritte e simulate con modelli matematici. Anche su scala globale (continentale o planetaria) ve ne sono di legate a fenomeni deterministici quali, ad esempio, la variazione dell’inclinazione dell’asse terrestre per effetto di imponenti assestamenti delle placche telluriche, all’eccentricità dell’orbita terrestre, alla circolazione oceanica (il Nino, ad esempio), a fenomeni geologici di particolare intensità, come l’eruzione di vulcani ad alta intensità energetica.

Il problema della previsione meteorologica è stato formulato compiutamente come problema matematico solo all’inizio del XX secolo ad opera del matematico norvegese Vilhelm Bjerknes, il quale descrisse il moto dell’atmosfera utilizzando le già ben note (all’epoca) equazioni di Eulero per la dinamica di un gas perfetto, opportunamente modificate per tener conto dell’azione della forza di gravità e del moto di rotazione terrestre.
Purtroppo, i dati relativi allo stato dell’atmosfera erano disponibili in un numero relativamente limitato di punti e si riferivano a variabili spesso eterogenee e ad istanti di tempo diversi. Inoltre, le equazioni di Eulero descrivono una amplissima gamma di moti dell’atmosfera, che possono avere luogo su scale spaziali e temporali diverse tra loro di molti ordini di grandezza (centimetri piuttosto che chilometri, secondi piuttosto che giorni). L’assenza di dati relativi ad alcune di queste scale può portare alla generazione di moti spuri (che non esistono in natura) e al deterioramento della qualità delle previsioni. Infine, una descrizione realistica dei fenomeni meteorologici non può ovviamente prescindere dalla previsione della distribuzione del vapore acqueo, dei suoi cambiamenti di fase (da liquido a gassoso) e delle conseguenti precipitazioni.

Il primo tentativo di affrontare il problema della risoluzione numerica effettiva delle equazioni del moto fu esperito dallo scienziato britannico Lewis Richardson, il cui sforzo pionieristico culminò nel 1922 con il primo esempio di calcolo concreto della soluzione delle equazioni del moto atmosferico su una regione vasta quanto l'intera Europa occidentale.

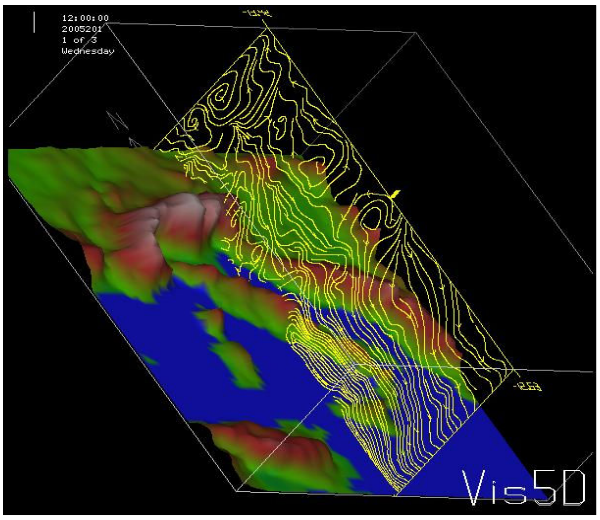


Fig.3 Calcolo 3D del campo di pressione sul territorio italiano

I risultati ottenuti da Richardson, attraverso complicatissimi calcoli manuali, portarono in realtà a previsioni totalmente errate, mancando, negli anni in cui Richardson effettuava i suoi calcoli, una teoria adatta a dominare le insidie delle equazioni da risolvere.
Per condurre a buon fine il sogno di Richardson fu decisivo il contributo del suo allievo Carl-Gustaf Rossby. Emigrato negli USA negli anni '20, egli contribuì a fondare il servizio meteorologico per l'aviazione civile e militare durante la seconda guerra mondiale. Tra i contributi indiretti del suo lavoro si può a buon diritto considerare anche la previsione meteo effettuata dagli americani per individuare il D-day (il 6 giugno 1944) per lo sbarco in Normandia.
I modelli matematici semplificati introdotti da Rossby resero possibile la prima previsione meteorologica con un calcolatore elettronico, risultato della collaborazione avviata a Princeton, alla fine degli anni '40, da John von Neumann e da Jules Charney. In particolare fu possibile effettuare una previsione sull'intero Nord-America attraverso un modello semplificato che descriveva l'atmosfera come un unico strato di fluido uniforme. Pur richiedendo 24 ore di calcolo sull'unico computer elettronico dell'epoca, l'ENIAC, per effettuare una previsione a sole 12 ore, il lavoro di Charney e von Neumann mostrò per la prima volta che una previsione basata esclusivamente su di un modello numerico poteva giungere a risultati qualitativamente e quantitativamente in accordo con la previsione che avrebbe potuto formulare un meteorologo esperto dell'epoca a partire dagli stessi dati.
Ciò ha posto le basi per il moderno approccio alla previsione meteorologica numerica.
In effetti, oltre allo spettacolare aumento delle prestazioni dei computer, vi sono stati miglioramenti radicali nell'accuratezza degli strumenti matematici di previsione, lo sviluppo di una teoria della predicibilità dei sistemi dinamici caotici, il miglioramento delle tecniche di assimilazione dati.
Inoltre, a partire dagli anni '60 alle stazioni di rilevamento a terra si è aggiunto l'uso sistematico dei rilevamenti effettuati dai satelliti, che costituiscono ormai la parte più rilevante dei dati utilizzati per l'inizializzazione di modelli numerici. Da allora, l'impatto dei progressi scientifici e tecnologici è stato notevolissimo. Per dare un'idea si pensi ad esempio ad alcune caratteristiche del modello globale IFS dello European Centre for Medium range Weather Forecast (ECMWF). Esso utilizza una griglia di calcolo con una risoluzione spaziale media di circa 22 km in orizzontale e 90 livelli verticali. Cio' consente di includere nel modello anche parte della stratosfera. Questo modello può effettuare previsioni a 10 giorni in poco più di un'ora di calcolo su di un moderno supercalcolatore parallelo, a cui vanno tuttavia aggiunte circa 6 ore necessarie ad effettuare la complessa procedura di assimilazione dei dati. Il modello IFS consente di effettuare in modo affidabile la previsione meteorologica per circa 7.5 giorni su scala continentale europea, assai di piu' dei 5.5 giorni possibili nel 1990.

Modelli per le Scienze della Vita

Pur essendo iniziato da svariati decenni, lo sviluppo di modelli matematici per le scienze della vita deve ancora raggiungere il suo acme.

La scoperta recente della sequenza completa del patrimonio genetico umano (il genoma), contenuto in ognuna delle nostre cellule (circa 10mila miliardi, di cui 100 miliardi nel solo cervello) rende possibile l'accesso ad un insieme di circa 30-40mila geni (scompartimenti, o pezzi di senso compiuto, del genoma) i quali codificano circa 250 mila proteine. Dopo 50 anni di biologia molecolare, rimane ancora da scoprire il ruolo dei geni regolatori, ovvero come l'informazione nel genoma è usata per creare questo "proteoma": come i geni formano una proteina, dove e quando la formano, quanta ne formano. I geni dell'emofilia, del daltonismo, della talassemia sono monofattoriali. Quelli che regolano l'altezza, la capacità di resistenza alla fatica, la forma degli occhi o della bocca, sono multifattoriali. La bioinformatica e la modellistica dovranno migliorare la comprensione della genetica dei caratteri multifattoriali. Ancora più difficile ed importante sarà il passo successivo: capire i meccanismi d'interazione di decine di migliaia di proteine nella generazione di funzioni biologiche. Questo compito di rappresentare quantitativamente le funzioni fisiologiche umane è oggi chiamato fisioma. La modellistica matematica è destinata a giocare un ruolo primario nello svelare il modo in cui l'informazione contenuta nel genoma è stata predisposta al fine di creare sistemi viventi. Essa puo' essere impiegata a livello cellulare, di organi, quale il cuore, e sistemico, quali il sistema circolatorio, respiratorio, nervoso, scheletrico.

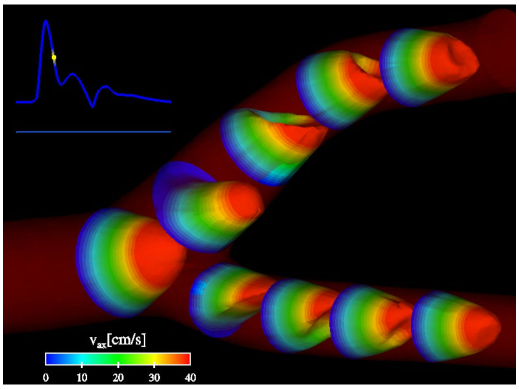


Fig.4 Profilo di velocità del sangue nella biforcazione carotidea

A questo fine essa richiederà lo sviluppo di modelli integrati:

- in senso orizzontale, ovvero basati sull'accoppiamento di differenti processi fisici o biologici alla stessa scala. La comprensione della natura accoppiata di questi processi richiede la messa a punto di diversi modelli computazionali in grado di trattarli singolarmente;
- in senso verticale, in quanto si debbono usare dati sperimentali e modelli matematici capaci a trattare scale spaziali dal livello molecolare (inferiori a 10^{-9} metri) a quello cellulare e tissutale (10^{-7}-10^{-3} metri) sino alla scala dei vari organi e dell'intero corpo (10^{-3} -10^{-1} metri).

Nel fornire una comprensione quantitativa del comportamento di un intero organo in termini di funzioni sub-cellulari, i modelli potrebbero stabilire un legame fra struttura molecolare e comportamenti clinicamente osservabili, aiutando in questo modo nell'interpretazione di immagini ottenute da risonanza magnetica, ultrasuoni o mappe di potenziali elettrici.

L'analisi quantitativa dell'interazione elettrica, meccanica e biochimica della funzione cardiaca, possibile se si dispone di modelli matematici integrati, può ad esempio spiegare il comportamento di una nuova medicina su una membrana che funziona da recettore.

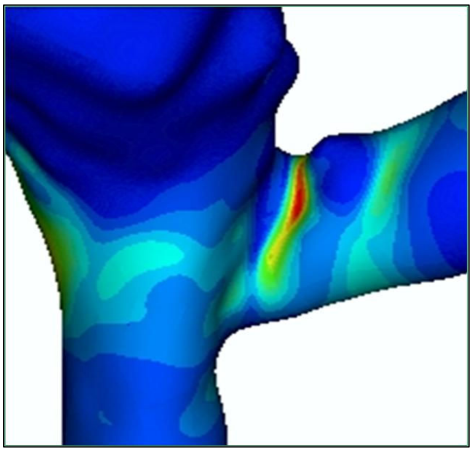


Fig. 5 Simulazione dello shear stress per un bambino affetto da Tetralogia di Fallot

Naturalmente gli scopi e gli obbiettivi dell'indagine matematica e della simulazione numerica cambiano al variare della scala. Durante gli anni Settanta, gli esperimenti in vitro o quelli su animali rappresentavano la modalità principale degli studi cardiovascolari. Recentemente, il progredire della fluidodinamica computazionale, così come dei netti miglioramenti nelle prestazioni informatiche, hanno prodotto significativi passi in avanti che promettono di rivoluzionare la ricerca vascolare.

Grandezze fisiche come lo shear stress (ovvero lo sforzo tangente) sulla membrana endoteliale, assai problematiche da misurarsi in vitro, possono essere calcolate su geometrie reali ottenute con algoritmi di ricostruzione tridimensionale grazie al supporto delle moderne e non invasive tecnologie di acquisizione dei dati (ad esempio, la risonanza magnetica nucleare, l'angiografia digitale, la tomografia computerizzata, l'anemometria doppler).

Fluendo nelle arterie e nelle vene, il sangue interagisce meccanicamente con le pareti dei vasi, dando origine a complessi problemi di interazione fluido-strutturale. In effetti, il fronte dell'onda pressoria trasferisce energia meccanica alle pareti che si dilatano; tale energia viene restituita al flusso sanguigno nella fase di compressione dei vasi stessi.
La simulazione vascolare dell' interazione fra fluido e parete richiede algoritmi che descrivano sia il trasferimento di energia a livello macroscopico tra il fluido (modellato tipicamente dalle equazioni di Navier-Stokes) e la struttura (modellata dalle equazioni della meccanica dei solidi), sia l'influenza a livello microscopico dello shear stress sull'orientamento, la deformazione e il danneggiamento delle cellule endoteliali.
Nel contempo, le equazioni del flusso devono essere abbinate a modelli appropriati per descrivere il trasporto, la diffusione e l'assorbimento delle componenti chimiche presenti nel sangue (come ad esempio ossigeno, lipidi, farmaci) nei diversi strati che compongono la parete delle arterie (intima, media e avventizia). Simulazioni numeriche di questo tipo possono aiutare a chiarire modificazioni biochimiche prodotte da alterazioni nel campo di flusso, dovute ad esempio alla presenza di una stenosi.
Nel sistema cardiovascolare, si riscontrano condizioni di flusso separato, generazione di moti circolatori secondari a valle di biforcazioni (per esempio quella carotidea nei suoi rami interno ed esterno) ma anche in presenza di vasi a grande curvatura (come l'arco aortico o le coronarie) e a valle di regioni con restrizioni, dovute alla presenza di stenosi. Vi sono inoltre zone con inversione del flusso (dalle regioni distali a quelle prossimali) nonché aree a shear stress basso o temporalmente oscillante.
Queste circostanze sono oggi riconosciute quali potenziali fattori nello sviluppo di patologie arteriose. Una comprensione dettagliata del cambiamento emodinamico locale, degli effetti della modificazione delle pareti vascolari sullo schema del flusso, del graduale adattamento nel medio-lungo periodo del sistema globale a seguito di interventi chirurgici, è oggi possibile grazie all'uso di raffinate simulazioni al computer e potrebbe rilevarsi estremamente utile nella fase preliminare alla realizzazione di un trattamento terapeutico e/o chirurgico. Una prospettiva simile potrebbe fornire specifiche indicazioni quanto al design di procedure chirurgiche. Simulare il flusso in un bypass coronarico, in particolare la ricircolazione che si determina a valle del re-innesto nella coronaria, può contribuire alla comprensione degli effetti della morfologia delle arterie sul flusso e quindi all'evoluzione post-chirurgica.

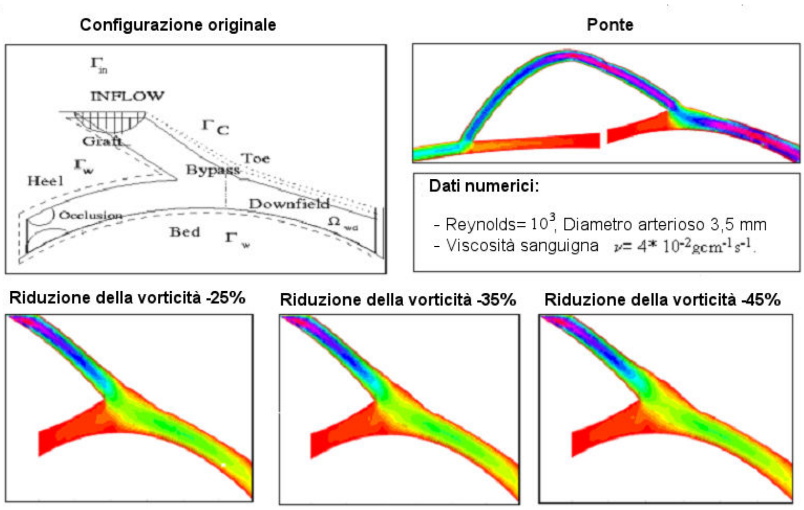


Fig. 6 Processo di ottimizzazione matematica di un by-pass arterioso

La teoria del controllo ottimale di forma può aiutare a "progettare" un by-pass che minimizzi la vorticità prodotta a valle del re-innesto nella coronaria. Analogamente, lo studio degli effetti delle protesi vascolari e degli impianti di valvole artificiali sull'emodinamica locale e globale può avanzare grazie a simulazioni sufficientemente accurate del campo di flusso del sangue.
In un tale ambito di "chirurgia virtuale", il risultato di trattamenti alternativi per un specifico paziente può essere previsto dalle simulazioni. Questo approccio numerico è un aspetto di un nuovo paradigma della pratica clinica conosciuto come "medicina predittiva".

Modelli per la Simulazione e la Competizione

Come abbiamo visto, la modellistica matematica sta gradualmente ma inesorabilmente affacciandosi in svariati contesti per proporsi come strumento ausiliare, allorquando non esclusivo, di indagine sia qualitativa sia quantitativa. L'applicazione dei modelli matematici non si limita all'ambito tecnologico, ambientale e a quello medico. Essa sta conquistando nuovi spazi, come per un' ideale migrazione fra settori a forte componente tecnico-scientifica ad altri in cui l'elemento umano assume il ruolo preponderante. Da diversi anni si adottano modelli deterministici e stocastici nell'analisi di rischio di prodotti finanziari favorendo la formazione di una disciplina nota con il nome di ingegneria finanziaria. La nuova frontiera ha già iniziato a lambire la sociologia, l'architettura, il tempo libero e lo sport.

Nello sport da competizione, la CFD sta assumendo da alcuni anni un ruolo determinante nella fase di pogettazione ed analisi delle prestazioni delle automobili di Formula 1. Tuttavia, quello automobilistico non è il solo settore in cui la modellistica matematico-numerica ha fatto il suo ingresso. A questo proposito, un'esperienza interessante è quella che ha visto il gruppo di ricerca di chi scrive impegnato nella campagna di Coppa America di Vela conclusasi con la vittoria dell'imbarcazione svizzera “Alinghi” nel marzo 2003 e poi ancora nel luglio 2007.

Sino a una ventina di anni fa, le diverse squadre di progettisti sviluppavano forme assai diversificate di vele, scafi, bulbi e chiglie. Oggi le varie forme geometriche hanno raggiunto una standardizzazione piuttosto uniforme e anche i più piccoli dettagli possono fare la differenza in termini di risultati. Citando Jerome Milgram, professore del MIT e veterano nella consulenza a diversi team americani di Coppa America, “Gli yachts di Coppa America richiedono una estrema precisione nel design dello scafo, delle parti in acqua e delle vele. Un nuovo scafo che offra una resistenza all'onda ridotta dell'1% può assicurare un guadagno di 30 secondi sulla linea d'arrivo”. Per ottimizzare le prestazioni di uno scafo si devono risolvere le equazioni della dinamica dei fluidi intorno all'intera barca, tenendo conto della variabilità di venti e onde, dei diversi regimi di regata (di poppa piuttosto che di bolina), della posizione e del movimento della barca avversaria. Ma va considerata anche la dinamica dell'interazione fra i fluidi presenti (aria e acqua) e le componenti strutturali (scafo, appendici immerse, vele e albero). Infine, va modellata con grande accuratezza la forma e il moto della cosiddetta superficie libera, ovvero dell'interfaccia di separazione fra acqua e aria. Idealmente, un modello completo dovrebbe essere in grado di riprodurre diversi aspetti fisici del problema in oggetto.

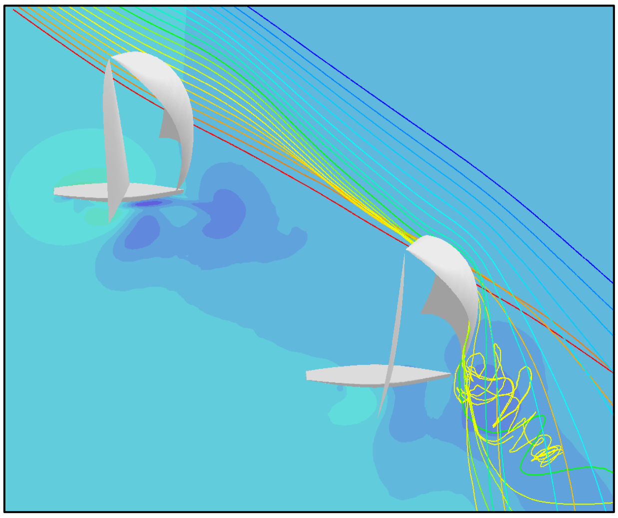


Fig. 7 Linee di flusso dell'aria fra due barche a vela da competizione in assetto da gara

Da un lato, dovrebbe tenere conto degli effetti dovuti alla viscosità dell'acqua, della transizione tra flusso laminare e flusso turbolento (quello che genera cascate di vortici di dimensioni variabili, dalla micrometrica alla metrica), delle scie turbolente generate dall'interazione del flusso con le parti immerse, della forma dell'onda che si genera sullo scafo. D'altro lato, dovrebbe saper calcolare le deformazioni strutturali che sono assai significative per via dei carichi estremi agenti sullo scafo (sino a 20 tonnellate), sull'albero e, soprattutto, sulle vele. L'obbiettivo è quello di sviluppare con i progettisti le forme ottimali per lo scafo, la chiglia, il bulbo e le alette. Occorre minimizzare la resistenza sott'acqua e massimizzare la spinta indotta dalle vele. La matematica consente di simulare in laboratorio le diverse situazioni, abbattendo drasticamente costi e tempi necessari a costruire un numero elevato di prototipi da provare in bacini artificiali o nella galleria del vento. Per ogni nuova configurazione proposta dai progettisti (alla fine sarebbero state diverse centinaia), è stato necessario costruire il modello geometrico (servono circa trecento superfici, di tipo splines, per ricoprire il solo scafo); generare la griglia di calcolo sulla superficie di tutti gli elementi della barca (di qualità sufficiente per permettere di catturare la transizione fra zone di flusso laminare e quelle di flusso turbolento); generare di conseguenza quella volumetrica nel dominio esterno; infine si devono risolvere le equazioni di Navier-Stokes che modellano l'accoppiamento fra moto dell'aria, quello dell'acqua e la conseguente forma dell'onda (la cosiddetta superficie libera), a loro volta completate da equazioni addizionali costituenti i modelli per il calcolo dell'energia turbolenta e del suo tasso di dissipazione. L'insieme di tali equazioni non puo' essere risolto esattamente (determinando, cioè, in forma esplicita, le soluzioni). La loro risoluzione approssimata richiede si introducano raffinati metodi di discretizzazione, i quali consentano i particolare di trasformare un problema di dimensione infinita in uno di dimensione grande ma finita. Il calcolo tipico (basato su schemi ai volumi finiti) ha richiesto in effetti la risoluzione di problemi non lineari con diverse decine di milioni di incognite. Facendo massiccio ricorso ad algoritmi paralleli, servono fino a 24 ore di tempo dedicato su piattaforme di calcolo parallele a 64 processori per effettuare la simulazione di punta caratterizzata da oltre 160 milioni di incognite.

Queste simulazioni consentono al design team di scartare tante soluzioni costruttive, all'apparenza innovative, e di adottarne altre che garantiscano migliori prestazioni. Inoltre, simulando gli effetti dell'interazione aerodinamica fra due barche, si possono determinare la consistenza delle zone d'ombra (le scie con minor vento per via della posizione relativa di una barca rispetto all'altra), la perturbazione del flusso e la vorticità della scia turbolenta che si genera per l'interazione dell'aria, con informazioni preziose per la tattica di gara. Questi studi raffinati e complicatissimi sono finalizzati a disegnare una imbarcazione che presenta una combinazione ottimale delle quattro caratteristiche che servono ad un'imbarcazione di Coppa America per risultare vincente: leggerezza, resistenza, velocità, nonché la manovrabilità necessaria per cambiare assetto nel minor tempo possibile.

Possiamo concludere osservando come quello della competizione sportiva rappresenti un teatro ideale capace di fare apprezzare il grande potenziale che la modellistica matematica e la simulazione numerica offrono per vincere le sfide che la vita di ogni giorno pone in svariati ambiti delle scienze applicate e dell'innovazione tecnologica.

Ringraziamenti *Si ringrazia L. Bonaventura, M.Sala, P.Ferrandi, P.Zunino, J.Wynne, M.Prosi, G.Rozza, N.Parolini e M.Sawley per aver fornito le simulazioni numeriche usate in questo articolo e F. Bonadei per l'accurata revisione del testo.*

Bibliografia

N. Parolini e A. Quarteroni. Mathematical models and numerical simulations for the America's Cup. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng**., 194(9-11):1001–1026, 2005.

A.Quarteroni, **Modellistica Numerica per Problemi Differenziali**, Springer-Verlag Italia, Milan, 2006 , 3ª edizione

A.Quarteroni, Modeling the Cardiovascular System – A Mathematical Adventure, in **SIAM News 34 (5), 2001** (Part I) and **SIAM News 34 (6),2001** (Part II)

A. Quarteroni e L. Formaggia, Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System, Chapter 1 in **Modelling of Living Systems, Handbook of Numerical Analysis Series,** pp. 1-101, P.G Ciarlet et J.L. Lions Eds., Elsevier, Amsterdam, 2004

A.Quarteroni, **Scientific Computing with MATLAB and Octave**, Springer-Verlag Heidelberg, 2006

A.Quarteroni e A.Valli, **Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations**, Oxford University Press, Oxford, 1999.

A. Quarteroni, **Modellistica Numerica per Problemi Differenziali**, Springer-Verlag Italia, Milano, 3[a] Edizione, 2006 (451 p.).

A. Quarteroni e F. Saleri, **Introduzione al Calcolo Scientifico**, Springer-Verlag Italia, Milano, 3[a] Edizione 2006. (306 p.)

A. Quarteroni, R. Sacco and F. Saleri, **Matematica Numerica**, Springer-Verlag Italia, Milano; seconda edizione, 2000 (in Italian) (440 p.).

A. Quarteroni, L. Formaggia, A. Veneziani, Eds., **Complex Systems in Biomedicine**, Springer, Milano 2006. (292 p.)

MOX Technical Reports, last issues

Dipartimento di Matematica "F. Brioschi",
Politecnico di Milano, Via Bonardi 9 - 20133 Milano (Italy)

16/2007 A. Quarteroni:
Modellistica Matematica e Calcolo Scientifico

15/2007 C. Vergara, P. Zunino:
Multiscale modeling and simulation of drug release from cardiovascular stents

14/2007 L. Dedé:
Reduced Basis Method for Parametrized Advection-Reaction Problems

13/2007 P. Zunino:
Discontinuous Galerkin methods based on weighted interior penalties for second order PDEs with non-smooth coefficients

12/2007 A. Deponti, L. Bonaventura, G. Rosatti, G. Garegnani:
An Accurate and Efficient Semi-Implicit Method for Section Averaged Free Surface Flow Modelling

11/2007 S. Badia, F. Nobile, C. Vergara:
Fluid-structure partitioned procedures based on Robin transmission conditions

10/2007 N. Parolini, A. Quarteroni:
Modelling and Numerical Simulation for Yacht Engineering

09/2007 C. May, N. Flournoy:
Asymptotics in response-adaptive designs generated by a two-colors, randomly reinforced urn

08/2007 L. Formaggia, E. Miglio, A. Mola, N. Parolini:
Fluid-structure interaction problems in free surface flows: application to boat dynamics

07/2007 A. Ern, A. E. Stephansen, P. Zunino:
A Discontinuous Galerkin method with weighted averages for advection-diffusion equations with locally vanishing and anisotropic diffusivity