ALESSANDRO VERRA

Dipartimento di Matematica
Università Roma Tre
Largo San Leonardo Murialdo, 1
00146 Roma, Italy

ASPETTI GEOMETRICI DELLA TEORIA DELLE VARIETÀ DI PRYM

Conferenza tenuta il giorno 7 Giugno 1999

1 Introduzione

Il tema generale di questa conferenza riguarda la costruzione di esempi espliciti di varietà abeliane principalmente polarizzate e lo studio del loro divisore theta. In altre parole si tratta di costruire dei tori complessi

$$A = V/\Lambda, \tag{1.1}$$

dove V indicherà d'ora in poi uno spazio vettoriale complesso di dimensione g e Λ un reticolo in V di rango $2g$, che siano dotati di una immersione olomorfa

$$\phi : A \to \mathbf{P}^n$$

determinata da $L^{\otimes k}$, dove L è un fibrato lineare tale che

$$h^0(L) = 1.$$

L è un fibrato ampio su A. Poichè $h^0(L) = 1$, esiste un unico divisore effettivo

$$\Theta \subset A \tag{1.2}$$

a cui L è associato. Per definizione L è una *polarizzazione principale* e Θ è *il divisore theta* corrispondente. Una coppia (A, Θ) si dirà *varietà abeliana principalmente polarizzata.* La condizione che L sia principale implica che Θ sia ridotto e connesso. Supporremo inoltre che Θ sia invariante rispetto alla moltiplicazione per -1.

L'esempio più classico di coppia (A, Θ), e la prima motivazione per lo studio di tali coppie, è costituito dalla *Jacobiana di una superficie di Riemann C* di genere g.

Sia ω_C il fibrato cotangente a C e sia $H^0(\omega_C)$ lo spazio vettoriale delle sue sezioni globali, cioè dei differenziali olomorfi su C. Consideriamo l'omomorfismo iniettivo

$$j : H_1(C, \mathbf{Z}) \to H^0(\omega_C)^*$$

definito nel modo seguente: per ogni $[\gamma] \in H_1(C, \mathbf{Z})$ l'elemento $j([\gamma])$ è il funzionale lineare $H^0(\omega_C) \to \mathbf{C}$ che associa a ω l'integrale $\int_\gamma \omega$. La Jacobiana di C è allora la coppia (A, Θ), dove $A = V/\Lambda$ con

$$V = H^0(\omega_C)^* \quad \text{e} \quad \Lambda = j(H_1(C, \mathbf{Z})).$$

Θ è, a meno di una traslazione, l'immagine della mappa di Abel

$$a : C^{(g-1)} \to A,$$

dove $C^{(g-1)}$ è il $(g-1)$-prodotto simmetrico di C. La costruzione è troppo nota per essere ulteriormente approfondita in questa sede. Tuttavia, se si vogliono cercare esempi diversi da quello appena considerato, non è difficile accorgersi di come le conoscenze a disposizione siano certamente minori, ed in ogni caso ben lontane dall'avere quelle caratteristiche di completezza che sono proprie del caso Jacobiano. La geografia dello spazio dei moduli

$$\mathcal{A}_g \tag{1.3}$$

delle coppie (A, Θ) appare dunque ancora non delineata in vari suoi aspetti, e questo vale anche per la maggior parte delle sottovarietà interessanti di $\mathcal{A}_g$. In proposito è forse utile riprendere qualche osservazione sui *luoghi di Andreotti-Mayer*

$$\mathcal{N}_k = \{(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g \mid \dim Sing\Theta \geq k\}. \tag{1.4}$$

Tali sottoinsiemi chiusi costituiscono una stratificazione naturale di $\mathcal{A}_g$. Essi furono introdotti da Andreotti e Mayer in un celebre articolo nel quale veniva affrontato il problema di caratterizzare il luogo Jacobiano in $\mathcal{A}_g$, ([3]). Per $k \geq 0$ i luoghi di Andreotti-Mayer definiscono famiglie speciali di varietà abeliane principalmente polarizzate. Appare quindi del tutto naturale porre almeno il seguente

PROBLEMA 1.1 Determinare il numero delle componenti irriducibili di $\mathcal{N}_k$ e la loro dimensione.

Tale problema è tuttavia ben lontano da una soluzione completa. Una variante della stratificazione precedente può essere proposta utilizzando la *mappa di Gauss*

$$\gamma_\Theta : \Theta \to \mathbf{P}V^*.$$

Per definizione γ_Θ associa a $x \in \Theta - Sing\Theta$ lo spazio tangente

$$\gamma_\Theta(x) = T_{\Theta,x} \subset V = T_{A,x}.$$

γ_Θ è determinata dal fibrato normale $\mathcal{O}_\Theta(\Theta)$ ed il suo luogo base è $Sing\Theta$. Sia

$$\mathcal{D}_k = \{(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g \mid \deg\gamma_\Theta \leq k\},$$

su questi luoghi, e sulla relativa stratificazione di $\mathcal{A}_g$, non si hanno in sostanza informazioni. Le considerazioni fin qui svolte non valgono per $g \leq 3$. Sia infatti

$$\mathcal{J}_g \subset \mathcal{A}_g \tag{1.5}$$

il *luogo Jacobiano*, e cioè la chiusura di Zariski della famiglia dei punti di $\mathcal{A}_g$ che corrispondono a Jacobiane. Per $g \leq 3$ si ha $\mathcal{J}_g = \mathcal{A}_g$ e di conseguenza ogni tipo di informazione è disponibile. D'altra parte anche nei casi $g = 4, 5$ esistono molte informazioni e questo vale anche per la stratificazione di Andreotti-Mayer che riproponiamo come esempio significativo. Fissiamo le notazioni seguenti:

- θ_{null} = *luogo theta-null* =

$$\{(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g \mid Sing\Theta \cap A_2 \neq \emptyset\},$$

  dove $A_2 \subset A$ è il gruppo di 2-torsione. θ_{null} è un divisore irriducibile ([19]).

- $\mathcal{H}_g$ = *luogo iperellittico* = chiusura di Zariski di

$$\{(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g \mid A \text{ è la Jacobiana di una curva iperellittica}\}.$$

- $\mathcal{A}_g^p$ = *luogo dei prodotti* =

$$\{(A_1 \times A_2, \Theta_1 \times A_2 \cup A_1 \times \Theta_2) \in \mathcal{A}_g \mid (A_i, \Theta_i) \in \mathcal{A}_{g_i},$$

$$i = 1, 2,\ 0 < g_i < g\}.$$

È immediato osservare che $\mathcal{A}_g^p \subset \mathcal{N}_{g-2}$. Inoltre è stata recentemente dimostrata da Ein e Lazarsfeld la seguente notevole congettura:

TEOREMA 1.1 $\mathcal{A}_g^p = \mathcal{N}_{g-2}$.

Veniamo ora alla descrizione dei luoghi di Andreotti-Mayer per $g = 4, 5$:

g = 4

- $\mathcal{N}_0 = \mathcal{J}_4 \cup \theta_{null}$,
- $\mathcal{N}_1 = \mathcal{H}_4$,
- $\mathcal{N}_2 = \mathcal{A}_4^p$.

g = 5

- $\mathcal{N}_0 = \mathcal{D} \cup \theta_{null}$,
- $\mathcal{N}_1 = \mathcal{J}_5 \cup \mathcal{V}$,
- $\mathcal{N}_2 = \mathcal{H}_5$,
- $\mathcal{N}_3 = \mathcal{A}_5^p$.

dove $\mathcal{D}$ è un divisore irriducibile. $\mathcal{V}$ è unione di 4 componenti irriducibili di codimensione 4 ([4], [18], [49]).

Si noti che, in entrambi i casi, $\mathcal{N}_{g-3}$ è il luogo iperellittico, mentre il luogo Jacobiano è una componente di dimensione massima di $\mathcal{N}_{g-4}$. I precedenti risultati sono stati resi possibili dalla esistenza, in dimensione quattro e cinque, di una costruzione esplicita della generica varietà abeliana principalmente polarizzata. Più precisamente vale il seguente

TEOREMA 1.2 *Ogni* $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$ *è una varieta' di Prym per* $g \leq 5$.

Le varietà di Prym, che definiremo e considereremo nella successiva sezione, costituiscono dunque un primo esempio concreto di varietà abeliana principalmente polarizzata che non sia necessariamente una Jacobiana. Si potrebbe forse aggiungere che si tratta dell'unica famiglia ampiamente conosciuta e diversa dalle Jacobiane.

2 Varietà di Prym

Le varietà di Prym, il cui studio fu iniziato da Wirtinger e Prym all'inizio del Novecento, sono riapparse negli anni settanta grazie ai lavori di Mumford, Beauville, Tjurin e numerosi altri autori. Esse si sono rivelate molto utili sia nello studio dei problemi esposti nella sezione precedente, sia in relazione a questioni anche molto diverse. Tra queste ultime il caso più celebre di applicazione riguarda il problema di Lueroth per varietà tridimensionali e la dimostrazione della non razionalità della ipersuperficie cubica di $\mathbf{P}^4$, ([11], [44]). Per introdurre la definizione di varietà di Prym, possiamo partire da un rivestimento

$$\pi : \tilde{C} \to C \tag{2.1}$$

tra due superfici di Riemann connesse e compatte. π determina un'applicazione

$$Nm : Pic^0(\tilde{C}) \to Pic^0(C) \tag{2.2}$$

tra le corrispondenti varietà di Picard dei fibrati lineari di grado zero su C. La funzione Nm, detta *mappa norma*, è definita ponendo:

$$Nm(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(d)) = \mathcal{O}_C(\pi_* d),$$

per ogni $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(d) \in Pic^0(\tilde{C})$. Nm è un morfismo di varietà abeliane, quindi la componente connessa dello zero

$$A = Ker^0(Nm)$$

è una sottovarietà abeliana di $Pic^0(\tilde{C})$. Una polarizzazione naturale su A è

$$M = \mathcal{O}_A(\tilde{\Theta}),$$

dove $\tilde{\Theta}$ è un divisore theta su $Pic^0(\tilde{C})$. In pochi casi esiste una polarizzazione principale L tale che $M = L^{\otimes k}$. Tra questi l'unico interessante si verifica quando π è un rivestimento doppio non ramificato. D'ora in poi supporremo perciò di essere sotto questa ipotesi ed indicheremo con

$$\eta \in Pic^0(C) \tag{2.3}$$

l'elemento non triviale di ordine due da cui π è definito. Nel caso in questione vale

$$M = L^{\otimes 2}.$$

Sia

$$\Xi \subset A \tag{2.4}$$

il divisore theta corrispondente a L. La coppia (A, Ξ) è per definizione *la varietà di Prym del rivestimento* π o della coppia (C, η). Poichè Nm è suriettiva, si ha

$$\dim A = g - 1$$

dove g indicherà d'ora in poi il *genere di* C. Prima di approfondire questa costruzione è utile indicare alcune questioni collegate in modo naturale allo studio delle varietà di Prym. Su tali questioni le conoscenze sono oggi piuttosto estese. Tuttavia, come vedremo, non mancano i problemi aperti, spesso di notevole rilievo.

Indicheremo con

$$\mathcal{P}_d \tag{2.5}$$

la chiusura di Zariski in $\mathcal{A}_d$ del *luogo delle varietà di Prym* e con

$$\mathcal{R}_g \tag{2.6}$$

lo *spazio dei moduli delle coppie* (C, η). $\mathcal{R}_g$ e' irriducibile di dimensione $3g - 3$.

2.1 Mappa di Prym e problema di Torelli

La mappa olomorfa

$$p_g : \mathcal{R}_g \to \mathcal{A}_{g-1} \tag{2.7}$$

che associa alla classe di isomorfismo di (C, η) la classe di isomorfismo di (A, Ξ) è nota come *mappa di Prym.* Un problema generale è quello di descrivere tale mappa. p_g è analoga per vari motivi alla *mappa di Torelli*

$$j_g : \mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_g,$$

che associa alla classe di isomorfismo di una curva C la classe di isomorfismo della sua Jacobiana. Per j_g vale il *Teorema di Torelli*:

TEOREMA 2.1 *j_g è iniettiva.*

Il teorema di Torelli afferma che è possibile ricostruire una curva C a partire dal dato della sua Jacobiana. Analogamente ci si può chiedere se è possibile ricostruire una coppia (C, η) a partire dal dato della sua varietà di Prym.

PROBLEMA 2.1 *p_g e' iniettiva?*

Tale problema ha una immediata risposta negativa se $g \leq 5$. Essendo infatti

$$\dim \mathcal{A}_{g-1} = \binom{g}{2} \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{R}_g = 3g - 3,$$

si ha $\dim \mathcal{R}_g > \dim \mathcal{A}_{g-1}$ se $g \leq 5$. Quindi p_g non può essere iniettiva in tal caso. In realtà esistono, per ogni valore di g, sottoinsiemi di $\mathcal{R}_g$ lungo i quali la mappa p_g non è iniettiva. Un esempio relativamente semplice è il seguente:

Sia $\mathcal{R}_g^h$ il luogo delle coppie (C, η) tali che C è iperellittica ed η è la differenza di due distinti punti di Weierstrass di C. La Prym di (C, η) è la Jacobiana di una curva iperellittica di genere $g - 1$ ([40], [13]). È sufficiente allora un conto di dimensioni per dedurre che $p_g / \mathcal{R}_g^h$ non può essere iniettiva.

D'altra parte abbiamo ([34], [28], [15])

TEOREMA 2.2 (TEOREMA DI TORELLI GENERICO) *La mappa di Prym p_g è genericamente iniettiva se $g \geq 7$.*

Dunque il problema posto sulla iniettività di p_g va riformulato in modo appropriato:

PROBLEMA 2.2 Determinare il massimo aperto U_g di $\mathcal{R}_g$ per il quale la mappa $p_g / U_g : U_g \to p_g(U_g)$ sia biolomorfa.

Possiamo dire che il *problema di Prym-Torelli* per una coppia (C, η) è quello di decidere se (C, η) definisce un punto di U_g. In caso contrario diremo che (C, η) è un *controesempio al problema di Prym-Torelli*. Sul problema di Prym-Torelli esistono controesempi e congetture particolarmente interessanti. L'affascinante geometria delle fibre della mappa di Prym per $g \leq 6$ fa parte di questo tema.

2.2 Varieta di Prym e luoghi di Andreotti-Mayer

Tra le varietà di Prym e le varietà Jacobiane esistono numerose analogie. In gran parte esse sembrano dovute al fatto che, in entrambi i casi, il divisore theta possiede un luogo singolare di dimensione piuttosto alta rispetto alla dimensione della varietà. Tale luogo ha fondamentale importanza nello studio delle varietà in questione. Ad esempio le singolarità quadratiche del divisore theta entrano in gioco sia nella dimostrazione del teorema di Torelli che nello studio del problema di Prym-Torelli. La prima descrizione del luogo singolare del divisore theta di una Prym generica è dovuta a Mumford ([40]).

TEOREMA 2.3 *Sia (A, Ξ) una Prym generica di dimensione d, allora* $\dim Sing\Xi = d - 6$. *Se* $\dim Sing\Xi \neq d - 6$ *la coppia (C, η) appartiene a una lista nota di casi.*

L' analogia tra varietà di Prym e Jacobiane appare di nuovo in evidenza se si guarda alle relazioni di tali varietà con i luoghi di Andreotti-Mayer ([3], [5], [20]):

TEOREMA 2.4

(Wirtinger, Beauville) $\mathcal{J}_d \subset \mathcal{P}_d$, (Andreotti-Mayer) $\mathcal{J}_d$ *e' una componente irriducibile di* $\mathcal{N}_{d-4}$,

(Debarre) $\mathcal{P}_d$ *e' una componente irriducibile di* $\mathcal{N}_{d-6}$.

In questo quadro si possono proporre varie questioni riguardanti le Prym che traggono origine da questioni analoghe studiate nel caso Jacobiano:

- *Descrivere i casi in cui* $Sing\Xi$ *è riducibile,*
- *Determinare il cono tangente ed il suo termine successivo nello sviluppo in serie di Taylor di* Ξ *in una singolarità quadratica,*
- *Descrivere la intersezione di* $\mathcal{P}_d$ *con altri luoghi di Andreotti-Mayer che non contengano* $\mathcal{P}_d$.

Quest'ultimo problema è particolarmente interessante e vale la pena di riportare subito alcuni risultati e congetture in proposito.

TEOREMA 2.5 (BEAUVILLE) $\mathcal{N}_{d-4} \cap \mathcal{P}_d$ *contiene una sola componente irriducibile di dimensione massima che è il luogo Jacobiano* $\mathcal{J}_d$. *Esistono tuttavia altre componenti di dimensione strettamente inferiore.*

CONGETTURA 2.1 (DONAGI) $\mathcal{N}_{d-3}$, $\mathcal{N}_{d-4}$ *sono contenuti in* $\mathcal{P}_d$.

Da questa congettura seguirebbero

CONGETTURA 2.2 $\mathcal{N}_{d-3} = \mathcal{H}_d$.

CONGETTURA 2.3 $\mathcal{J}_{d-4}$ *e' l'unica componente irriducibile di* $\mathcal{N}_{d-4}$ *avente dimensione* $3d-3$.

2.3 Punti singolari del divisore Theta e Teoria di Brill-Noether

Le singolarità del divisore theta di una Prym nascono in relazione con i luoghi di Brill-Noether

$$W_d^r = \{\tilde{L} \in Pic^d(\tilde{C}) \mid h^0(\tilde{L}) \geq r+1\}$$

associati alla curva $\tilde{C}$. Si considerino infatti la mappa norma

$$N : Pic^{2g-2}(\tilde{C}) \to Pic^{2g-2}(C),$$

definita come in (2.2), e lo schema

$$W^3_{\omega_C} = W^3_{2g-2} \cdot N^{-1}(\omega_C). \qquad (2.8)$$

Per una *Prym generica*, $Sing\Xi$ è isomorfo a una componente di tale schema. Essa è irriducibile non appena $\dim Sing\Xi \geq 1$. Precisamente $Sing\Xi$ è la componente degli elementi $\tilde{L}$ tali che $h^0(\tilde{L})$ è pari. Inoltre la molteplicità di $\tilde{L}$ come elemento di $Sing\Xi$ è $\frac{1}{2}h^0(\tilde{L})$. La descrizione di $Sing\Xi$ può dunque essere ricondotta allo studio del luogo $W^3_{\omega_C}$. Tale studio è stato affrontato più in generale da vari autori:

PROBLEMA 2.3 Fissato $M \in Pic^k(C)$ studiare i luoghi

$$W^r_M = W^r_k \cdot N^{-1}(M),$$

dove $N : Pic^k(\tilde{C}) \to Pic^k(C)$ è la mappa norma indotta da un rivestimento doppio qualsiasi $\pi : \tilde{C} \to C$ e

$$W^r_k = \{\tilde{L} \in Pic^k(\tilde{C}) \mid h^0(\tilde{L}) \geq r + 1\}.$$

Questo problema viene talvolta chiamato *problema di Prym-Brill-Noether*. Se π è un generico rivestimento doppio non ramificato e $M = \omega_C$ la principale risposta al problema di Prym-Brill-Noether è la seguente ([60], [9])

TEOREMA 2.6 $\dim W^r_{\omega_C} = \rho'$, *con* $\rho' = g - 1 - \binom{r+1}{2}$.

Gli unici altri casi per i quali un teorema analogo è stato provato sono i seguenti:

$$M = \omega_C(-a) \quad \text{oppure} \quad M = \omega_C(2b - a)$$

dove a è un divisore effettivo e $2b$ è linearmente equivalente al divisore di ramificazione di π ([36]).

TEOREMA 2.7 *Siano* $d = deg\ a$ *e* $n = deg\ b$. *Sia poi*

$$\rho' = \rho'(g, r, d, n) = g - 1 + n - (d + n)(r + 1) - \binom{r+1}{2}.$$

Se $\rho' \geq 0$ *allora* $\dim W^r_M \geq \rho'$.

Vari punti interessanti della teoria di Prym-Brill-Noether attendono di essere sviluppati ed in particolare alcune evidenti relazioni con la teoria di Brill-Noether per i fibrati di rango due su C ([36], [8]).

2.4 Mappa di Gauss per il divisore Theta

Nel caso della Jacobiana (JC, Θ) di una curva C, la mappa di Gauss del divisore theta ammette una descrizione geometrica particolarmente elegante. In questo caso Θ si identifica birazionalmente al $g-1$-prodotto simmetrico di C. D'altra parte $JC = V/\Lambda$, dove $V = H^0(\omega_C)^*$, e quindi $\mathbf{P}V^*$ è il sistema lineare canonico $\mid \omega_C \mid$. Dopo queste identificazioni la mappa di Gauss diventa

$$\gamma : C^{(g-1)} \to \mid \omega_C \mid .$$

La fibra di γ in $h \in \mid \omega_C \mid$ è costituita dai divisori $d \in C^{(g-1)}$ tali che $h - d$ è effettivo. Il grado della mappa è

$$\deg \gamma = \binom{2g-2}{g-1}.$$

Il luogo di ramificazione è la ipersuperficie duale della curva C immersa canonicamente in $\mathbf{P}V$. Lo studio della mappa è, in un certo senso, lo studio della geometria delle sezioni iperpiane di C. Nel caso di una Prym (A, Ξ) abbiamo $V = H^0(\omega_C \otimes \eta)^*$, la mappa di Gauss è

$$\gamma : \Xi \to \mid \omega_C \otimes \eta \mid . \tag{2.9}$$

Se per una Jacobiana entrano in gioco le sezioni iperpiane h di C, in questo caso vanno prese in considerazione le quadriche di rango tre che sono osculatrici a C lungo un divisore d del sistema lineare $\mid \omega_C \otimes \eta \mid$. Vedremo in che modo tali quadriche entrano in gioco e come rispondere, almeno in parte, alle questioni seguenti.

- *Qual' è il grado della mappa di Gauss γ per una Prym generica?*
- *Quali sono i possibili gradi di γ?*
- *Come descrivere geometricamente γ e la sua ramificazione?*

Nelle rimanenti due sezioni ci serviremo liberamente di costruzioni elementari ed esempi allo scopo di illustrare e commentare alcune delle risposte finora date ai vari problemi esposti.

3 Coni tangenti al divisore theta ed applicazioni

In questa sezione utilizzeremo la costruzione del cono tangente in un punto al divisore theta di una Prym per studiare la mappa di Gauss e per affrontare il problema di Prym-Torelli. Preliminarmente è utile introdurre una definizione equivalente di varietà di Prym ([39], [1, pag. 294]).

Sia (A, Θ) la varietà di Prym del rivestimento $\pi : \tilde{C} \to C$ e sia

$$N : \tilde{P}ic^{2g-2}(\tilde{C}) \to Pic^{2g-2}(C) \tag{3.1}$$

la mappa norma precedentemente considerata. Valgono le proprietà seguenti:

1. $N^{-1}(\omega_C) = P \cup P'$, dove P e P' sono biregolari ad A.
2. P e P' sono distinte dalla parità della dimensione degli spazi delle sezioni globali dei loro elementi. Per definizione porremo
$$P = \{\tilde{L} \in N^{-1}(\omega_C) \mid h^0(\tilde{L}) \quad \text{è pari.}\}. \tag{3.2}$$
3. Su P è definito il seguente divisore
$$\Xi = \{\tilde{L} \in P \mid h^0(\tilde{L}) \geq 2\}. \tag{3.3}$$
4. A meno di una traslazione P si identifica canonicamente ad A, dopo tale identificazione si ha $\Xi = \Theta$.

D'ora in poi porremo

$$\tilde{J} = \tilde{P}ic^{2g-2}(\tilde{C}) \quad , \quad J = Pic^{2g-2}(C). \tag{3.4}$$

Si noti che, insiemisticamente,

$$P \cap \tilde{\Theta} = \Xi,$$

dove

$$\tilde{\Theta} = \{\tilde{L} \in \tilde{J} \mid h^0(\tilde{L}) \geq 1\}$$

è il divisore theta di $\tilde{J}$. Poichè i punti di Ξ soddisfano $h^0(\tilde{L}) \geq 2$ abbiamo

$$\Xi \subset Sing\Theta$$

per il teorema di Riemann-Kempf, ([1, pag. 241]). Inoltre vale

$$P \cdot \tilde{\Theta} = 2\Xi.$$

Nel seguito di questa sezione una varietà di Prym sarà una coppia (P, Ξ).

3.1 Spazio tangente al divisore theta

D'ora in poi supporremo che $\tilde{C}$ sia canonicamente immersa nel suo spazio canonico

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}H^0(\omega_C)^*. \tag{3.5}$$

Sia $i : \tilde{C} \to \tilde{C}$ l'involuzione che scambia gli strati di π. i induce una involuzione u su $H^0(\omega_C)^*$ dotata delle seguenti proprieta':

1. Siano $\mathbf{P}^+$ e $\mathbf{P}^-$ le proiettivizzazioni degli autospazi $+1$ e -1 di u, si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{P}^- & \xleftarrow{h^-} & \mathbf{P} & \xrightarrow{h^+} & \mathbf{P}^+ \\ \cup & & \cup & & \cup \\ C^- & \xleftarrow{h^-/\tilde{C}} & \tilde{C} & \xrightarrow{h^+/\tilde{C}} & C, \end{array}$$

   dove h^+ e h^- indicano le proiezioni lineari di centri $\mathbf{P}^-$ e $\mathbf{P}^+$. C^- e C sono rispettivamente il modello Prym-canonico e canonico di C. In particolare si verifica che $h^+/\tilde{C} = h^-/\tilde{C} = \pi$.

2. Sia $x \in P$. La proiettivizzazione dello spazio tangente $T_{\tilde{J},x}$ è $\mathbf{P}$, mentre la proiettivizzazione del sottospazio $T_{P,x}$ è $\mathbf{P}^-$.

Vediamo di scrivere l'equazione in $\mathbf{P}^-$ dello spazio tangente a Ξ in un suo punto

$$\tilde{L} \in \Xi - Sing\Xi.$$

Poiche' Ξ e' non singolare in $\tilde{L}$ vale $h^0(\tilde{L}) = 2$. Quindi, per il teorema di Riemann-Kempf, $\tilde{L}$ è un punto doppio di $\tilde{\Theta}$. Il cono tangente a $\tilde{\Theta}$ in $\tilde{L}$ è una quadrica

$$\tilde{Q} \subset \mathbf{P}. \tag{3.6}$$

Sia s_1, s_2 una base di $H^0(\tilde{L})$, si noti che $x_{mn} = s_m i^* s_n$ appartiene a $H^0(\omega_C)$. L'equazione di $\tilde{Q}$ è allora

$$\det A = 0,$$

dove

$$A = (x_{mn}), \quad (1 \leq m, n \leq 2), \tag{3.7}$$

([1, pag. 298]). Geometricamente $\tilde{Q}$ si può descrivere come quella quadrica di rango ≤ 4 i cui rulings di spazi lineari massimali tagliano su $\tilde{C}$ le serie $\mid \tilde{L} \mid$ e $\mid i^*\tilde{L} \mid$. Poichè $2\Xi = P \cdot \tilde{\Theta}$, la equazione di $\tilde{Q}$ ristretta a $\mathbf{P}^-$ è il quadrato della equazione di $T_{\Xi,\tilde{L}}$. Tale quadrato è

$$\det(A -^t A) = t^2, \quad t = x_{12} - x_{21}.$$

3.2 Mappa di Gauss per il divisore theta

Restringendo il precedente iperpiano $\{t = 0\}$ alla curva $C^- \subset \mathbf{P}^-$ otteniamo un divisore Prym-canonico

$$d \in \mid \omega_C \otimes \eta \mid .$$

Possiamo quindi interpretare la mappa di Gauss come quella mappa

$$\gamma : \Xi \to \mid \omega_C \otimes \eta \mid$$

che associa a $\tilde{L}$ l'elemento $d = C^- \cdot \{t = 0\}$. D'altra parte si vede facilmente che la restrizione a $\mathbf{P}^+$ di $\tilde{Q}$ è una *quadrica di rango tre*

$$q = \{\det(A +^t A) = 0\}$$

contenuta nello spazio canonico di C. q è interessante per la mappa di Gauss a causa del seguente ([58])

LEMMA 3.1 *Sia $\gamma(\tilde{L}) = d$. Allora $q \cdot C = 2d$.*

Consideriamo ora il sistema lineare

$$\mathbf{Q} = \mid \mathcal{O}_{\mathbf{P}^+}(2) \mid$$

delle quadriche dello spazio canonico di C ed in esso la varietà

$$\mathbf{Q}^3$$

delle quadriche di rango ≤ 3. Sia

$$Q_P \subset \mathbf{Q}^3$$

la sottovarietà delle quadriche di rango tre che tagliano sulla curva canonica C due volte un divisore $d \in \mid \omega_C \otimes \eta \mid$ e sia poi

$$\lambda : \mathbf{Q}^3 \to \mid \omega_C^{\otimes 2} \mid$$

la mappa di restrizione. Per il lemma abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \Xi & \xrightarrow{\alpha} & Q_P \\ \downarrow \gamma & & \lambda/Q_P \downarrow \\ \mid \omega_C \otimes \eta \mid & \xrightarrow{v} & V, \end{array}$$

dove α associa a $\tilde{L}$ la quadrica di rango tre q e

$$V \subset \mid \omega_C^{\otimes 2} \mid$$

è l'immagine di $\mid \omega_C \otimes \eta \mid$ mediante la mappa di Veronese v, che associa a d $2d$. Tale diagramma è il punto di partenza per calcolare il grado di γ.

TEOREMA 3.1 *Il grado della mappa di Gauss per il divisore theta di una Prym generale è*

$$D(g) + 2^{g-3},$$

dove $D(g)$ indica il grado della varietà $\mathbf{Q}^3$.

La dimostrazione si basa sul precedente diagramma ([58]). Si può infatti provare che la mappa α ha grado due sulla immagine. In effetti α è birazionalmente equivalente alla mappa quoziente $\Xi \to \Xi / < -1 >$. D'altra parte λ è un morfismo finito se C è una curva generica. Ciò segue facilmente da un conto di dimensioni e da una semplice conseguenza geometrica della teoria di Brill-Noether: una curva canonica generale non è contenuta in quadriche di rango tre. Inoltre si dimostra che Q_P non è nel luogo di diramazione di λ. Se α fosse suriettivo $\mathcal{Q}_P$ sarebbe irriducibile e otterremmo dal precedente diagramma

$$\deg \gamma = 2D(g).$$

Questo però non è vero perchè, invece, $\mathcal{Q}_P$ si spezza in due componenti irriducibili una delle quali è $\alpha(\Xi)$. Bisogna dunque calcolare il grado di λ su ognuna delle due componenti. Questo calcolo si può fare per degenerazione al caso in cui C è trigonale. Abbiamo:

- $D(g) + 2^{g-3} = (g-1)!$ per $3 \leq g \leq 6$,
- $D(g) + 2^{g-3} = (g-1)! - 32 = 688$ per $g = 7$,
- $D(g) + 2^{g-3} = 4256$ per $g = 8$.

La formula per $D(g)$ è ben nota ([48] o [32]). Naturalmente sarebbe interessante vedere come varia il grado della mappa in casi speciali. Altrettanto interessante dovrebbe essere l'uso della stessa costruzione per studiare la ramificazione di γ. Il successivo esempio permetterà di chiarire ulteriormente sia la costruzione che il metodo di dimostrazione del teorema.

ESEMPIO 3.1 Vediamo di ritrovare il grado di γ quando $\dim P = 3$. In questo caso

$$C = q_0 \cap f \subset \mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^3$$

dove f è una superficie cubica e q_0 una quadrica liscia. Sia $d \in | \omega_C \otimes \eta |$, le quadriche che tagliano $2d$ su C definiscono un fascio l a cui appartiene q_0. Abbiamo

$$(\lambda / Q_P)^{-1}(d) = \{\text{quadriche singolari di } l\}.$$

Sia $q \in (\lambda / Q_P)^{-1}(d)$ e sia

$$E$$

il luogo base di l. E è una quartica ellittica tale che $E \cdot q = 2d$. q determina su E la *theta caratteristica*

$$\theta_q = \mathcal{O}_E(h + a_q - d)$$

dove $| a_q |$ è la serie lineare tagliata su E dall'unica schiera di rette di q e h è una sezione piana di E. Si verifica facilmente che la funzione $q \to \theta_q$ è una corrispondenza biunivoca tra la fibra $\lambda/\mathbf{Q}_P^{-1}(d)$ e l'insieme delle theta caratteristiche su E. D'altra parte una costruzione opportuna permette di ottenere da q due fibrati

$$\tilde{L}_q, i^*\tilde{L}_q \in P \cup P' \subset \tilde{J}$$

soddisfacenti alla condizione $h^0(\tilde{L}_q) \geq 2$ ed inoltre tali che:

1. $h^0(\tilde{L}_q) = 2 + h^0(\theta_q)$,
2. $\alpha^{-1}(q) = \{\tilde{L}_q, i^*\tilde{L}_q\}$ se q appartiene ad $\alpha(\Xi)$.

Poichè $h^0(\tilde{L}) = 2$ se $\tilde{L} \in \Xi$, ne segue che q appartiene ad $\alpha(\Xi)$ se e solo se θ_q non è effettiva. Il numero di tali theta è tre. Dalle considerazioni precedenti segue allora che il grado della mappa di Gauss è sei, come è ben noto.

L'esempio si generalizza al caso in cui C è una curva trigonale di genere $g \geq 4$. Abbiamo

$$C \subset R \subset \mathbf{P}^+$$

dove R è uno scroll razionale normale, (nell'esempio: $R = q_0$). Sia

$$q \in (\lambda/Q_P)^{-1}(d),$$

in questo caso porremo

$$E = q \cap R.$$

E è una curva iperellittica di genere $g - 3$. Sia $| a_q |$ la serie lineare di grado $g - 2$ tagliata dall'unica schiera di spazi lineari massimali della quadrica di rango tre q. Esattamente come sopra si definisce una theta caratteristica

$$\theta_q = \mathcal{O}_E(h + a_q - d) \tag{3.8}$$

su E. Inoltre q determina una coppia di fibrati $\tilde{L}_q, i^*\tilde{L}_q$ per i quali valgono le precedenti proprietà (1) e (2). Ciò implica

$$\alpha(\Xi) = \mathcal{Q}_{P,0} \tag{3.9}$$

dove $\mathcal{Q}_{P,k}$ indica la chiusura di Zariski dell'insieme

$$\{q \in \mathcal{Q}_P \mid h^0(\theta_q) = k\}.$$

Ne segue che il grado della mappa di Gauss γ è, in questo caso, due volte il numero delle theta-caratteristiche non effettive su una curva iperellittica di genere $g-3$ ovvero

$$\binom{2g-4}{g-2}.$$

Tale numero coincide con il grado della mappa di Gauss per il divisore theta di una Jacobiana di dimensione $g-1$. Ciò non è sorprendente. Se C è trigonale P diventa infatti una Jacobiana ([46, teorema di Recillas]). Se C è trigonale $\mathcal{Q}_P$ è unione delle componenti $\mathcal{Q}_{P,k}$. Deformando Ξ in una famiglia liscia $\{\Xi_t, t \in B\}$ si verifica che il limite di $\alpha(\Xi_t)$ è l'unione dei $\mathcal{Q}_{P,k}$, con k pari. Lo studio di questa particolare deformazione permette il calcolo del grado di γ nel caso generale.

3.3 Punti doppi del divisore theta e problema di Prym-Torelli

Sia $\tilde{L} \in Sing\Xi$ e sia $h^0(\tilde{L}) = 2m$, $m \geq 1$. Come nel caso $m = 1$ possiamo costruire una matrice di ordine $2m$

$$A = (s_u i^* s_v)$$

a partire da una base $s_1 \ldots s_{2m}$ di $H^0(\tilde{L})$. $detA$ e' l'equazione del cono tangente al divisore $\tilde{\Theta}$ nel punto $\tilde{L}$. La restrizione di $detA$ a $\mathbf{P}^-$ è

$$\det(A -{}^t A) = 0.$$

$A -{}^t A$ è antisimmetrica di ordine $2m$, quindi $\det(A -{}^t A)$ è il quadrato di un polinomio di grado m. Tale polinomio è l'equazione del cono tangente a Ξ in $\tilde{L}$. Nel seguito diremo che $\tilde{L}$ e' una *singolarità stabile* se la precedente equazione non è identicamente nulla. In caso contrario $\tilde{L}$ si dirà instabile. *Su una Prym generale non esistono singolarità instabili.*

TEOREMA 3.2 ([60], [15]) *Sia (P, Ξ) una varietà di Prym generica di dimensione $d \geq 7$. Allora $Sing\Xi$ è ridotto irriducibile di dimensione*

$d-6$ ed il suo punto generico è una singolarità quadratica. Per $d=6$ $Sing\Xi$ è costituito da 16 singolarita' quadratiche. Per $d \leq 5$ $Sing\Xi$ è vuoto.

Nel seguito supporremo, salvo avviso del contrario, che (P,Ξ) sia sufficientemente generale. $Sing_2\Xi$ parametrizza una famiglia di quadriche di $\mathbf{P}^-$: si tratta dei coni tangenti proiettivizzati alle singolarità quadratiche (stabili) di Ξ. Per quanto abbiamo osservato, l'equazione al quadrato di ognuno di questi coni è il determinante di una matrice antisimmetrica 4×4 di forme lineari. Ne segue che una tale equazione definisce una *quadrica di rango al più sei.*

La famiglia di queste quadriche è importante nello studio del *problema di Prym-Torelli.* Sia $\tilde{L}$ un punto di $Sing_2\Xi$ e sia

$$Q_{\tilde{L}} \subset \mathbf{P}^- \tag{3.10}$$

il cono tangente proiettivizzato a Ξ in $\tilde{L}$. Si può verificare che

$$C^- \subset Q_{\tilde{L}}.$$

TEOREMA 3.3 ([15]) *Per una generica (P,Ξ) si ha*

$$C^- = \cap Q_{\tilde{L}}, \quad \tilde{L} \in Sing_2\Xi$$

se $\dim P \geq 8$. *Se* $\dim P = 7$ *l'intersezione è costituita da C^- più due punti.*

In particolare questo teorema ci dice che la coppia (C,η) risulta univocamente determinata dalla famiglia delle singolarità quadratiche di Ξ, se (P,Ξ) è generica e $g \geq 9$. Si tratta dunque di una dimostrazione del *teorema di Prym-Torelli generico* già menzionato. Le prime dimostrazioni di tale teorema, valide per $g \geq 7$, sono dovute a Kanev ([34]) e Friedman-Smith ([28]). Esse usano argomenti diversi dal precedente. Il primo tentativo di usare le quadriche $Q_{\tilde{L}}$ è dovuto probabilmente a Tjurin ([53]). L'analogo del teorema precedente per il caso Jacobiano segue come corollario del teorema di Green (3.4).

TEOREMA 3.4 (GREEN) *Sia (A,Θ) la Jacobiana di una curva C canonicamente immersa in $\mathrm{P}H^0(\omega_C)^*$. I coni tangenti a $Sing_2\Theta$ generano lo spazio vettoriale delle quadriche contenenti C.*

Se C ha indice di Clifford ≥ 2, l'intersezione delle quadriche contenenti C è C. Quindi, se C è generale e $g \geq 5$, C è intersezione dei coni tangenti parametrizzati da $Sing_2\Theta$. Non è chiaro se valga un analogo del teorema di Green per una curva Prym-canonica. In positivo vale il seguente risultato di Lange e Sernesi ([38]):

TEOREMA 3.5 *Se l'indice di Clifford di C è ≥ 3 e $g \geq 8$ l'intersezione*

$$\bigcap Q, \quad C^- \subset Q$$

è la curva C^- più eventualmente una unione di sottospazi lineari.

D'altra parte i controesempi noti al problema di Prym-Torelli sono tutti realizzati a partire da rivestimenti di curve C aventi indice di Clifford ≤ 2. In base a ciò sembra ragionevole riproporre, parzialmente modificata, una congettura dovuta a Donagi (congettura tetragonale).

CONGETTURA 3.1 *Sia $(C,\eta) \in \mathcal{R}_g$, se C ha indice di Clifford ≥ 3 la mappa di Prym è iniettiva in (C,η).*

Inoltre:

CONGETTURA 3.2 *Sia C immersa in $\mathbf{P}^{g-2}$ dal sistema lineare $|\,\omega_C \otimes \eta\,|$ e sia W lo spazio vettoriale delle forme quadratiche nulle su C. Se C ha indice di Clifford ≥ 3 W è generato dal sottoinsieme $Sing\Xi_2$.*

3.4 Punti doppi di Ξ e luoghi di Andreotti-Mayer

$Sing_2\Xi$ è importante nello studio delle relazioni del luogo di Prym $\mathcal{P}_d$ con i luoghi di Andreotti-Mayer. A dire il vero questa considerazione vale più in generale per una qualsiasi varietà abeliana principalmente polarizzata

$$(A,\Theta) \in \mathcal{A}_d$$

per la quale $Sing_2\Theta$ sia non vuoto. Sia infatti

$$A = V/\Lambda,$$

allora lo spazio tangente a $\mathcal{A}_d$ nel punto $o = (A,\Theta)$ si identifica canonicamente con

$$Sym^2 V.$$

Ovviamente si ha una inclusione naturale

$$Sing_2\Theta \subset Sym^2V^*,$$

definita dalla mappa $x \to Q_x$ che associa ad $x \in Sing_2\Theta$ il cono tangente a Θ in x. Nel seguito

$$Q_x^{\perp} \subset Sym^2V$$

indicherà l'iperpiano ortogonale al vettore Q_x. Il seguente lemma è ben noto ([3], [61], [1, pag. 253]),

LEMMA 3.2 *Sia $o = (A, \Theta)$ come sopra. Sia $Sing\Theta$ irriducibile di dimensione k e sia $Sing_2\Theta$ non vuoto. Allora per lo spazio tangente in o al luogo di Andreotti-Mayer $\mathcal{N}_k$ vale la inclusione*

$$T_{\mathcal{N}_k,o} \subset \bigcap Q_x^{\perp}, \quad x \in Sing_2\Theta.$$

Vediamo come si applica tale lemma per provare che $\mathcal{P}_d$ è una componente irriducibile del luogo di Andreotti-Mayer $\mathcal{N}_{d-6}$, ($d \geq 7$). Sia $o = (P, \Xi)$ un punto generale di $\mathcal{P}_d$, allora $Sing\Xi$ soddisfa le ipotesi del lemma ([60], [9], [16]). Possiamo considerare C come immersa in $\mathbf{P}V$ dal sistema lineare $|\ \omega_C \otimes \eta\ |$. Quindi ogni Q_x, $x \in Sing_2\Xi$, definisce una quadrica in $\mathbf{P}V$. Una tale quadrica contiene C. Consideriamo lo spazio vettoriale

$$W = < Q_x, x \in Sing_2\Theta >$$

generato dai coni quadrici Q_x. Per il teorema di Debarre si ha

$$W = H^0(\mathcal{I}(2)) \subset Sym^2V^*,$$

dove $\mathcal{I}$ è il fascio di ideali della curva C. D'altra parte si ha

$$\mathrm{codim} H^0(\mathcal{I}(2)) = 3d = \dim \mathcal{P}_d.$$

Applicando il lemma si ha $T_{N,o} \subset W^{\perp}$, quindi $\dim T_{\mathcal{N}_{d-6},o} \leq 3d$. D'altra parte è ovvio che $\dim T_{\mathcal{N}_{d-6},o} \geq \dim \mathcal{P}_d$, pertanto

$$\dim T_{\mathcal{N}_{d-6},o} = \dim T_{\mathcal{P}_d,o} = 3d$$

e $\mathcal{P}_d$ deve essere una componente irriducibile di $\mathcal{N}_{d-6}$. Un'analoga dimostrazione vale, applicando il teorema di Green, per provare che il luogo Jacobiano $\mathcal{J}_d$ è una componente irriducibile di $\mathcal{N}_{d-4}$.

Per il luogo di Andreotti-Mayer $\mathcal{N}_1$ vale

$$\mathrm{codim}\mathcal{N}_1 \geq 3,$$

anche se esistono motivi per supporre che tale codimensione cresca quadraticamente in funzione di d ([12]). Le varietà di Prym permettono di descrivere concretamente, in dimensione bassa, le componenti di $\mathcal{N}_1$ ([18]). Nel successivo *esempio* produciamo un chiuso

$$M \subset \mathcal{P}_d, \quad d \geq 4,$$

avente codimensione tre e contenuto in $\mathcal{N}_1$. Se $d \leq 5$ M coincide con la componente di dimensione massima di $\mathcal{N}_1$. Se $d = 6$ è possibile provare che M è una componente di $\mathcal{N}_1$. Per definizione M è la chiusura di Zariski del luogo delle Prym delle coppie (C, η) tali che:

1. su C esiste una theta caratteristica θ con $h^0(\theta) = 3$,

2. $h^0(\theta \otimes \eta) = 0$.

La famiglia R delle curve C soddisfacenti 1 ha codimensione tre nello spazio dei moduli delle curve di genere $d + 1$, ([52]). D'altra parte è possibile provare che la condizione 2 implica che la mappa di Prym p_{d+1}/R sia genericamente finita sulla propria immagine. Quindi M ha codimensione 3 in $\mathcal{P}_d$. Se $(A, \Theta) \in M$, $Sing\Theta$ contiene una componente irriducibile di singolarità quadratiche instabili. Tale componente è isomorfa alla curva $\tilde{C}$.

d $= 4$ C è iperellittica di genere 5. M è il luogo iperellittico $\mathcal{H}_4$ in $\mathcal{A}_4$, (unica componente di codimensione tre di $\mathcal{N}_1$),

d $= 5$ C è una quintica piana liscia. M e' il luogo Jacobiano in $\mathcal{A}_5$, (unica componente di codimensione tre di $\mathcal{N}_1$),

d $= 6$ C e' una sestica piana con tre nodi allineati. M è il luogo delle Jacobiane intermedie dei quartic double solids con quattro nodi, ([19]).

Potrebbe essere interessante lo studio della intersezione

$$\mathcal{N}_1^* \cap \mathcal{P}_d,$$

dove $\mathcal{N}_1^*$ indica l'unione delle componenti irriducibili di $\mathcal{N}_1$ non contenenti $\mathcal{P}_d$. Per $d \geq 7$ non è chiaro se esistano relazioni tra il precedente luogo M ed eventuali componenti di $\mathcal{N}_1^*$ di codimensione bassa.

4 La mappa di Prym

La bellezza della geometria delle varietà di Prym è particolarmente messa in evidenza quando si considera la mappa di Prym

$$p_{d+1} : \mathcal{R}_{d+1} \to \mathcal{A}_d \tag{4.1}$$

e la struttura delle sue fibre in dimensione $d \leq 5$. In tal caso la mappa è dominante. Gli strumenti chiave per descrivere le fibre sono la mappa di Abel-Prym, il lemma di Masiewicki e la costruzione tetragonale di Donagi.

4.1 Mappa di Abel-Prym

Sia (P, Ξ) la varietà di Prym del rivestimento $\pi : \tilde{C} \to C$ e sia $i : \tilde{C} \to \tilde{C}$ l'involuzione determinata da π. Per definizione la mappa di Abel-Prym

$$\alpha : \tilde{C} \to P \tag{4.2}$$

associa a $x \in \tilde{C}$ l'elemento

$$\alpha(x) = \mathcal{O}_{\tilde{C}}(x - i(x)) \in P \subset Pic^0(\tilde{C}).$$

Si verifica facilmente che α è iniettiva se $\tilde{C}$ è non iperellittica e che i è indotta dalla moltiplicazione per -1 su P. La classe di $\alpha_* \tilde{C}$ nell'anello di coomologia di P è

$$[2\Xi^{d-1}/(d-1)!].$$

LEMMA 4.1 (MASIEWICKI) *Sia* (P, Ξ) *una varietà abeliana principalmente polarizzata e sia* $\tilde{\Gamma} \subset P$ *una curva liscia, irriducibile e tale che:*

1. $\tilde{\Gamma}$ *ha classe di omologia* $[2\Xi^{d-1}/(d-1)!]$,

2. $\tilde{\Gamma}$ *ha genere* $2d+1$,

3. $\tilde{\Gamma}$ *è invariante rispetto alla moltiplicazione per* -1.

Allora (P,Ξ) *è la Prym di* $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$, *dove* $\Gamma = \tilde{\Gamma}/ < -1 >$ *e* π *è la mappa quoziente.*

La fibra di p_{d+1} può quindi essere descritta considerando la famiglia delle curve di P soddisfacenti alle condizioni del lemma. Questo metodo funziona in modo soddisfacente se $d \leq 3$. Vediamo una descrizione birazionale della fibra.

d $= 3$ (P,Ξ) è la Jacobiana di una curva di genere tre. $\tilde{\Gamma}$ ha genere 7 e classe di omologia $[\Xi^2]$. Si dimostra che $\tilde{\Gamma}$ deve essere intersezione completa di due traslati $\Xi + a$ e $\Xi + b$ del divisore theta. Poichè $\tilde{\Gamma}$ è invariante per -1 si ha $a = -b$. In conclusione

$$\tilde{\Gamma} = (\Xi + e) \cap (\Xi - e)$$

con $e \in P$. Usando questa osservazione si dimostra che la fibra è birazionale a $P/ < -1 >$, cioè alla varietà di Kummer di P ([47]).

d $= 2$ (P,Ξ) è la Jacobiana di una curva di genere due. La classe di omologia di $\tilde{\Gamma}$ è $[2\Xi]$. Le altre due condizioni implicano che $\tilde{\Gamma}$ appartiene al sistema lineare $\mid 2\Xi \mid$. Su tale sistema agisce il gruppo $G \cong \mathbf{Z}_2^4$ delle traslazioni su P per un elemento di ordine 2. La fibra risulta essere birazionale al quoziente $\mid \Xi \mid /G$, ([56]). Tale quoziente è noto: si tratta dello spazio dei moduli $\mathcal{A}_2^{(2)}$ delle superfici abeliane principalmente polarizzate e dotate di una struttura di livello due ([54]).

d $= 1$ P è una curva ellittica, Ξ è lo zero della struttura di gruppo su P. Sia $\pi : \tilde{C} \to C$ un rivestimento che determina (P,Ξ). Si verifica facilmente che $\tilde{C}$ è iperellittica e che la mappa di Abel-Prym $\alpha : \tilde{C} \to P$ è un rivestimento doppio. Sia $\beta : \tilde{C} \to \mathbf{P}^1$ la mappa iperellittica. Si noti che $\alpha \times \beta : \tilde{C} \to P \times \mathbf{P}^1$ è una immersione. L'immagine Γ di $\alpha \times \beta$, definisce un sistema lineare $\mid \Gamma \mid$ di dimensione 5. Il gruppo G degli automorfismi di $P \times \mathbf{P}^1$

che fissano $\mid \Gamma \mid$ contiene $PGL(2)$. Il quoziente $\mid \Gamma \mid /G$ è una superficie razionale, birazionale alla fibra della mappa di Prym.

La precedente descrizione birazionale può essere migliorata. Infatti p_g si estende ad una mappa propria

$$\overline{p}_{d+1} : \overline{\mathcal{R}}_{d+1} \to \mathcal{A}_d. \tag{4.3}$$

su una opportuna compattificazione parziale

$$\overline{\mathcal{R}}_{d+1} \tag{4.4}$$

dello spazio dei moduli $\mathcal{R}_{d+1}$. Se $d \leq 5$ esiste una descrizione biregolare della fibra generale di $\overline{p}_{d+1}$ ([26], [27], [47], [56]).

4.2 La costruzione tetragonale di Donagi

Lo studio della fibra della mappa di Prym $\overline{p}_{d+1}$ nei casi $d = 4$ e $d = 5$ si basa sulla celebre costruzione tetragonale di Donagi. Tale costruzione, valida per ogni valore di d, determina il più importante *controesempio al teorema di Prym-Torelli*. La stessa costruzione può essere inoltre applicata ai casi sopra considerati, ([21]).

Sia $\pi : \tilde{C} \to C$ un rivestimento doppio non ramificato di una *curva tetragonale*, cioè dotata di un fascio τ di divisori di grado quattro. Sia poi

$$N : \tilde{C}^{(4)} \to C^{(4)}$$

la naturale mappa norma tra i (4)-prodotti simmetrici delle due curve. τ è contenuto in $C^{(4)}$. Donagi prova che la controimmagine di τ si spezza in due curve

$$\tilde{C}_1 \quad , \quad \tilde{C}_2$$

che sono in generale lisce, irriducibili di genere $d+1$. Entrambe sono dotate di una involuzione senza punti fissi indotta in modo naturale dalla analoga involuzione di $\tilde{C}$. Inoltre i loro quozienti mediante le rispettive involuzioni sono tetragonali. La restrizione a $\tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2$ della mappa

$$1 - i_* : \tilde{C}^{(4)} \to P$$

è una immersione. Perciò identificheremo le due curve con le loro immagini in P.

$\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ soddisfano a tutte le ipotesi del lemma di Masiewicki. Abbiamo quindi costruito, a partire da $\pi : \tilde{C} \to C$, due altri rivestimenti

$$\pi_j : \tilde{C}_j \to C_j = \tilde{C}_j / < -1 > \quad j = 1, 2 \tag{4.5}$$

aventi di nuovo (P, Ξ) come varietà di Prym associata. Poichè i tre rivestimenti considerati non sono in generale isomorfi, la costruzione tetragonale fornisce un controesempio al problema di Prym-Torelli. La costruzione permette inoltre una ulteriore interpretazione del fatto che p_g sia non iniettiva per $g \le 6$. Infatti una curva generale di genere $g \le 6$ è sempre tetragonale.

La costruzione tetragonale può essere iterata, applicandola di nuovo ad uno dei due rivestimenti π_j. Un teorema di Debarre ci dice che, se il genere è sufficientemente grande, non si ottengono in tal modo altri rivestimenti diversi dai precedenti.

TEOREMA 4.1 (DEBARRE) *Il grado della mappa di Prym sul luogo dei rivestimenti ètale di curve tetragonali è tre a partire da* $g \ge 13$

La costruzione tetragonale si estende al caso dei *rivestimenti ammissibili.* Tali rivestimenti sono definiti per curve stabili ed hanno come spazio dei moduli la compattificazione parziale $\overline{\mathcal{R}}_g$ già considerata. Come si è osservato p_g si estende a un morfismo

$$\overline{p}_g : \overline{\mathcal{R}}_g \to \mathcal{A}_{g-1}.$$

Diremo che due rivestimenti ammissibili $\pi_1 : \tilde{C}_1 \to C_1$, $\pi_2 : \tilde{C}_2 \to C_2$ sono *connessi dalla costruzione tetragonale* se uno dei due si ottiene dall'altro dopo avere applicato un certo numero di volte la costruzione tetragonale.

La *congettura tetragonale* di Donagi ([25, 6.5.1]) afferma che due punti su una stessa fibra della mappa

$$p_g : \mathcal{R}_g \to \mathcal{A}_{g-1}$$

sono sempre connessi dalla costruzione tetragonale. La congettura implica che, se le coppie (C_1, η_1) e (C_2, η_2) sono distinte e definiscono la stessa Prym, allora C_1 e C_2 devono essere tetragonali. La congettura ha senso per curve lisce, cioè per punti su una fibra di p_g e non di $\overline{p}_g$.

Nel caso di $\overline{p}_g$ esiste infatti un controesempio ben noto alla questione posta, si tratta dei cosiddetti rivestimenti di Wirtinger ([4], [26]). Altri esempi, sempre a proposito di $\overline{p}_g$ e non di p_g, sono stati costruiti da Naranjo studiando la mappa di Prym per rivestimenti di curve biellittiche ([45]). D'altra parte l'autore ha provato che la congettura tetragonale stessa non è vera se $g = 10$ ([57]). Vale infatti il seguente

TEOREMA 4.2 *Sia $S \subset \mathcal{R}_{10}$ il luogo delle coppie (C, η) tali che C è una sestica piana liscia. Allora p_{10}/S ha grado due sulla immagine.*

Poichè le sestiche piane non sono tetragonali, la congettura non è vera in questo caso. È tuttavia ragionevole pensare che il caso delle sestiche piane sia l'unica eccezione 3.1. La costruzione del controesempio si basa sullo studio delle ipersuperfici

$$T \subset \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2 \tag{4.6}$$

non singolari di bigrado $(2,2)$. Le due proiezioni canoniche determinano due strutture di fibrato in coniche

$$p_n : T \to \mathbf{P}^2, \quad n = 1, 2.$$

La curva discriminante di p_n è una sestica liscia C_n munita in modo naturale di un rivestimento doppio e non ramificato

$$\pi_n : \tilde{C}_n \to C_n.$$

Come è ben noto la Jacobiana intermedia JT di T è la varietà di Prym di π_n ([6]). I due rivestimenti risultano, in generale, non isomorfi per cui il grado della mappa $p_{10}/S : S \to p_{10}(S)$ è almeno due.

Siano $\mathcal{T}$ lo spazio dei moduli di T e sia $\tilde{\mathcal{T}}$ lo spazio delle coppie (T, p_n). Per dimostrare che il grado di p_{10}/S è due si considera il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\mathcal{T}} & \xrightarrow[u]{} & S \\
\downarrow f & & \downarrow p_{10} \\
\mathcal{T} & \xrightarrow{j} & \mathcal{A}_{10}
\end{array}$$

dove f è la mappa dimenticante $(T, p_n) \to T$, j è la mappa di Torelli $T \to JT$ e u è la mappa $(T, p_n) \to \pi_n$. Si dimostra che u e j hanno grado uno sull'immagine. Poichè f ha ovviamente grado due, anche p_{10}/S ha grado due.

La congettura tetragonale è vera per $g \leq 6$ ed è uno degli strumenti per descrivere la mappa di Prym. La bellezza della geometria di tale mappa culmina nei casi di genere sei e cinque che ora brevemente riassumeremo. Ci sembra questo il modo migliore di concludere questa incompleta antologia riguardante le varietà di Prym.

4.3 La mappa di Prym in genere 5 e 6

Sia

$$M \subset \mathcal{R}_6 \tag{4.7}$$

lo spazio dei moduli delle coppie (Q, α) dove

$$Q \subset \mathbf{P}^2$$

è una quintica liscia ed α soddisfa alla condizione

$$h^0(\mathcal{O}_Q(1) \otimes \alpha) = 0.$$

La mappa di Prym

$$p_6/M : M \to \mathcal{A}_5$$

è iniettiva e la sua immagine è un aperto del luogo Jacobiano

$$\mathcal{J}_5 \subset \mathcal{A}_5.$$

In effetti un punto di $p_6(M)$ risulta essere la Jacobiana di una curva canonica

$$C \subset \mathbf{P}^4$$

sufficientemente generale. Sia

$$\pi : \tilde{Q} \to Q$$

il rivestimento definito da α. Allora Q parametrizza la famiglia delle quadriche di rango quattro contenenti C e $\tilde{Q}$ la famiglia delle schiere di piani contenuti in tali quadriche. Inoltre π è la funzione che associa ad ogni schiera di piani la quadrica che li contiene ([53], [44]). Il fatto che la Prym di (Q, α) sia la Jacobiana di C implica

$$Pic^0(C) = Im(1 - i^*) \subset Pic^0(\tilde{Q}),$$

dove $i : \tilde{Q} \to \tilde{Q}$ è l'involuzione definita da π. Sia

$$\eta \in Pic_2^0(C)$$

un elemento non banale di 2-torsione e sia

$$G \subset Pic_2^0(Q)$$

l'immagine inversa mediante l'omomorfismo

$$\pi^* : Pic_2^0(Q) \to Pic^0(\tilde{Q})$$

del gruppo generato da η. G è isomorfo a $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ ed è generato da α e da un secondo elemento β. Risultano in tal modo definite tre coppie:

$$(Q, \alpha), (Q, \beta), (Q, \alpha \otimes \beta)$$

ed altrettante varietà di Prym. Usando il pairing di Weil su $Pic_2^0(Q)$ si verifica facilmente che esiste un unico $x \in G$ diverso da zero e α e tale che $h^0(\mathcal{O}_Q(1) \otimes x) = 0$. Sia $x = \beta$ e sia

$$\pi_1 : \tilde{Q}_1 \to Q$$

il rivestimento definito da β. La varietà di Prym di π_1 è la Jacobiana di una seconda curva C_1 di genere 5. Inoltre il sottogruppo

$$\pi_1^* G \subset Pic_2^0(C_1) \subset Pic_2^0(\tilde{Q}_1)$$

è generato da un elemento η_1. Applicando alla coppia (Q, β) la stessa costruzione si riottiene (C, η). La costruzione definisce dunque una involuzione

$$\lambda : \mathcal{R}_5 \to \mathcal{R}_5. \tag{4.8}$$

Inoltre le due coppie (C, η), (C_1, η_1) definiscono la stessa Prym, per cui ([26])

$$p_5 = p_5 \cdot \lambda,$$

Il ruolo del terzo elemento $y = \alpha \otimes \beta$ è altrettanto interessante. In primo luogo la Prym di (Q, y) è la *Jacobiana intermedia di una ipersuperficie cubica*

$$Y \subset \mathbf{P}^4.$$

Sia

$$o \in \mathcal{A}_4$$

l'immagine, mediante p_5, del punto (C, η) e sia poi

$$F(Y)$$

la superficie che parametrizza le rette contenute in Y. La conclusione di Donagi è costituita, almeno per un punto generale $o \in \mathcal{A}_4$, dal seguente

TEOREMA 4.3 *Esiste un isomorfismo naturale*

$$\overline{p}_5^{-1}(o) / < \lambda > \cong F(Y).$$

In particolare $\overline{p}_5^{-1}(o)$ *è un rivestimento doppio della superficie delle rette* $F(Y)$.

Oltre che da Donagi, lo studio di p_5 è stato ulteriormente sviluppato da E. Izadi in una serie più recente di lavori ([33]). La struttura, altrettanto ricca e interessante, di

$$p_6 : \mathcal{R}_6 \to \mathcal{A}_5$$

e le relazioni di tale mappa, avente grado 27, con la geometria della superficie cubica e delle sue rette sono dovute a Donagi e Smith ([27]).

Riferimenti bibliografici

[1] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. GRIFFLTHS, J. HARRIS, Geometry of algebraic curves, Vol. I, Springer-Verlag, New York, 1985.

[2] M. ADAMS, C. MCCRORY, T. SHIFRIN, R. VARLEY, *Invariants of Gauss Maps of Theta Divisors*, Proceedings of Symposia in Pure Mathemtics 54-2 (1993), 1-7.

[3] A. ANDREOTTI, A.MAYER, *On period relations for abelian integrals on algebraic curves*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **21** (1967), 189-238.

[4] A. BEAUVILLE, *Sous-variétés spéciales des variétés de Prym*, Compositio Math. **45**, 357-383 (1982).

[5] A. BEAUVILLE, *Prym varieties and the Schottky problem*, Invent. Math. **41** (1977), 149-196.

[6] A. BEAUVILLE, *Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires*, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. **10** (1977), 309-391.

[7] A. BEAUVILLE, *Prym Varieties: A Survey*, AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **49** (1989), 607-619.

[8] A. BEAUVILLE, *Fibrés de rang 2 sur une courbe, fibré déterminant et fonctions theta*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), 431-448.

[9] A. BERTRAM, *An existence theorem for Prym special divisors*, Invent. Math. **90** (1987), 669-671.

[10] A. BERTRAM, B. FEINBERG, *On stable rank two bundles with canonical determinant and many sections*, in Algebraic geometry (Catania, 1993/Barcelona, 1994), 259-269, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **200** Dekker, New York, 1998.

[11] H. CLEMENS, P. GRIFFITHS, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. Math. **95** (1972), 281-356.

[12] C. CILIBERTO, G. VAN DER GEER, *The Moduli Space of Abelian Varieties and the Singularities of the Theta Divisor*, preprint AG9911127 (1999).

[13] S.G. DALALJAN, *The Prym variety of two-sheeted covering of a hyperelliptic curve*, Uspehi Math. Nauk **29** (1974), 165-166 (in russo).

[14] O. DEBARRE, *Sur les variétés de Prym des courbes tetragonales*, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. **21** (1988), 545-559.

[15] O. DEBARRE, *Sur le problème de Torelli pour les variétés de Prym*, American J. of Math. **111** (1989), 111-134.

[16] O. DEBARRE, *Le théorème de Torelli pur les intersections de trois quadriques*, Inventiones Math. **95** (1989), 507-528.

[17] O. DEBARRE, *Sur le théorème de Torelli pour les solides double quartiques*, Compositio Math. **73** (1990), 161-187.

[18] O. DEBARRE, Variétés de Prym, conjecture de la trisécante et ensembles d'Andreotti et Mayer, Univ. Paris Sud, Thesis, Orsay, 1987.

[19] O. DEBARRE, *Le lieu des variétés abéliènnes don le diviseur theta est singulier a deux composantes*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **25** (1992), 687-707.

[20] O. DEBARRE, *Variétés de Prym et ensembles d'Andreotti-Mayer*, Duke Math. J. **60** (1990), 599-630.

[21] R. DONAGI, *The tetragonal construction*, AMS Bull. 4 (1981), 181-185.

[22] R. DONAGI, *The unirationality of $\mathcal{A}_5$*, Annals of Math. **119** (1984), 269-307.

[23] R. DONAGI, *Big Schottky*, Inventiones Math. **89** (1987), 569-599.

[24] R. DONAGI, *Non-Jacobians in the Schottky loci*, Annals of Math. **126** (1987), 193-217.

[25] R. DONAGI, *The Schottky problem*, in Theory of Moduli, **LNM 1337** Springer-Verlag (1988), 8-137.

[26] R. DONAGI, *The fibers of the Prym map*, Contemp. Math. **136** (1992), 55-125

[27] R. DONAGI, R. SMITH, *The structure of the Prym map*, Acta Math. **146** (1981), 25-102.

[28] R. FRIEDMAN, R. SMITH, *The generic Torelli Theorem for the Prym map*, Inv. Math. **67** (1982), 473-490.

[29] B. VAN GEEMEN, *Siegel modular forms vanishing on the moduli space of curves*, Inv. Math. **78** (1984), 329–349.

[30] B. VAN GEEMEN, G. VAN DER GEER, *Kummer varieties and the moduli space of curves*, Am. J. of Math. **108** (1986), 615–642.

[31] B. VAN GEEMEN, E. PREVIATO, *Prym varieties and the Verlinde formula*, MSRI preprint, May 1991.

[32] J. HARRIS, L.W. TU, *On symmetric and skew symmetric determinantal varieties*, Topology **23** (1984), 71–84.

[33] E. IZADI, *On the moduli space of four dimensional principally polarized abelian varieties*, Univ. of Utah Thesis, June 1991.

[34] V. KANEV, *The global Torelli theorem for Prym varieties at a generic point*, Math. USSR Izvestija **20** (1983), 235–258.

[35] V. KANEV, *Quadratic singularities of the Pfaffian theta divisor of a Prym variety*, Math. Notes of the Ac. of Sc. of the USSR, **31** (1982),301–305.

[36] V. KANEV, *Special line bundles on curves with involution*, Math. Z. **222** (1996), 213–229.

[37] V. KANEV, *Recovering of curves with an involution by extended Prym data*, Math. Annalen **299** (1994), 391–414.

[38] H. LANGE, E. SERNESI, *Quadrics containing a Prym-canonical curve*, J. of Alg. Geom. **5** (1996), 387–399.

[39] D. MUMFORD, *On the equations defining Abelian Varieties*, Inventiones Math. **1** (1966), 287–354.

[40] D. MUMFORD, *Prym varieties I. Contributions to Analysis*, 325-350, New York, Acad. Press, 1974.

[41] D. MUMFORD, *Curves and their Jacobians*, U. of Michigan Press Ann-Arbor (1975).

[42] D. MUMFORD, *On the Kodaira dimension of the Siegel modular variety*, **LNM 997** (1983), 348–375.

[43] L. MASIEWICKI, *Universal properties of Prym varieties with an application to algebraic curves of genus five*, Trans. Amer. Math. Soc. **222** (1976), 221–240.

[44] J. MURRE, *Reduction of the proof of the non rationality of a non-singular cubic threefold to a result of Mumford*, Compositio Math. **27** (1973), 63–82.

[45] J. C. NARANJO, *Prym varieties of bi-elliptic curves*, J. reine angew. Math. **424** (1992), 47–106.

[46] S. RECILLAS, *Jacobians of curves with a g_4^1 are Prym varieties of trigonal curves*, Bol. Soc. Math. Mexicana **19** (1974), 9–13.

[47] S. RECILLAS, L.H. SOLIS, *The fibre of the Prym map in genus four*, Boll. U.M.I. (1998).

[48] T.G. ROOM, The Geometry of determinantal loci, Cambridge University Press (1938).

[49] R. SMITH, R. VARLEY, *Components of the locus of singular theta divisors of genus 5* LNM **1124** Springer-Verlag (1983), 338–416.

[50] R. SMITH, R. VARLEY, *Deformations of theta divisors and the rank 4 quadrics problem*, Compositio Math. **76** (1990), 367–398.

[51] R. SMITH, R. VARLEY, *Multiplicity g points on theta divisors*, Duke Math. J. **82** (1996), 319–326.

[52] M. TEIXIDOR, *Half-canonical series on Algebraic Curves*, Transactions AMS **302** (1987), 99–115.

[53] A.N. TJURIN, *The geometry of the Poincarè theta-divisor of a Prym variety*, Math. USSR Izvestija **9** (1975), 951–986.

[54] G. VAN DER GEER, *The geometry of a Siegel modular threefold*, Math. Annalen **260** (1982), 317–350.

[55] R. VARLEY, *Weddle's surfaces, Humbert's curves, and a certain 4-dimensional abelian variety*, Amer. J. Math. **108** (1986), 931–952.

[56] A. VERRA, *The fibre of the Prym map in genus three*, Math. Ann. **276** (1987), 433-448.

[57] A. VERRA, *The Prym map has degree two on plane sextics*, (1992) non pubblicato.

[58] A. VERRA, *The degree of the Gauss for a general Prym-Theta divisor*, J. Alg. Geom. **10** (2001), 219-246

[59] G. WELTERS, *Recovering the curve data from a general Prym variety*, Amer. J. of Math **109** (1987), 165-182.

[60] G. WELTERS, *A theorem of Gieseker-Petri type for Prym varieties*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **18** (1985), 671-683.

[61] G. WELTERS, *Polarized abelian varieties and the Heat Equation*, Compositio Math. **49** (1983), 173-194.