ALESSANDRO SILVA

Dipartimento di Matematica “Guido Castelnuovo”
Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
P.zzale Aldo Moro 2, 00185 Roma

CONVESSITÀ OLOMORFA ED IL PROBLEMA DELL’IMMERSIONE DI UNO SPAZIO COMPLESSO

Conferenza tenuta il giorno 26 Ottobre 1998

1 Preliminari e natura del problema

Sia M una varietà topologica fissata insieme a delle proprietà (P) riguardanti la sua struttura, cioè riguardanti la regolarità delle coordinate insieme a delle condizioni fissate sull’algebra delle funzioni continue definite su di essa (ad esempio M varietà differenziabile con struttura C^k fissata). Sia X una qualsiasi varietà topologica la cui struttura soddisfa la proprietà P. Il problema dell’immersione consiste nel domandarsi se, date M ed X come sopra, esiste un’applicazione $F : X \to M$ di regolarità compatibile con la proprietà (P) tale che $F(X)$ sia una sottovarietà di M per una struttura che gode della proprietà (P).

Ad esempio, se si prende $M = \mathbb{R}^N$ considerato come varietà differenziabile di classe $C^k, k \geq 1$ fissato, si ha un risultato classico di H. Whitney [38] del 1936 che asserisce che comunque si prenda una varietà differenziabile X di classe C^k e di dimensione n esiste un'applicazione $F : X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ iniettiva, con differenziale iniettivo che induce un omeomorfismo tra X e $F(X)$ dotata della topologia indotta.

Se inoltre X è dotata di una struttura riemanniana, un bellissimo risultato di John Nash [28] dice che esiste F con le stesse proprietà che sia anche un'*isometria*.

Se la proprietà (P) è quella di essere una varietà analitica complessa il problema dell'immersione, quindi mediante applicazioni olomorfe, è di natura assai diversa. Convincersi di ciò è molto semplice: si prenda ad esempio una varietà analitica complessa compatta e connessa X. In questo caso l'algebra delle funzioni olomorfe su X è costituita dalle sole costanti per il principio di massimo; non potrà quindi esistere alcun omeomorfismo olomorfo di X su qualche sottovarietà analitica complessa di $\mathbb{C}^N$, in quanto l'algebra delle funzioni olomorfe su $F(X)$ dovrebbe contenere le restrizioni a $F(X)$ di tutte le funzioni olomorfe su $\mathbb{C}^N$ e quindi anche funzioni olomorfe non costanti.

D'altra parte, come vedremo, è possibile caratterizzare tutte le varietà complesse olomorficamente omeomorfe a sottovarietà complesse di $\mathbb{C}^N$. Tali varietà saranno quindi necessariamente non compatte; tuttavia non tutte le varietà analitiche complesse non compatte posseggono tale proprietà. Si prenda ad esempio $X = \mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1}$ per $q > 1$: in tal caso $\mathbb{CP}_{N-q}$ è una singolarità rimovibile per le funzioni olomorfe su $\mathbb{CP}_N$ che sono solo le costanti. Ne segue che la varietà complessa non compatta X non possiede funzioni olomorfe non costanti e non potrà quindi esistere alcun omeomorfismo olomorfo di X su qualche sottovarietà analitica complessa di $\mathbb{C}^N$.

A classi differenti di varietà analitiche complesse X dovranno corrispondere quindi diverse *sedi del modello M* di X ai fini del problema dell'immersione. Un'ulteriore complicazione è data dal fatto che la natura dei problemi trattati in geometria complessa porta naturalmente a dover considerare oggetti, detti *spazi analitici complessi* che sono varietà complesse al di fuori di un luogo di zeri di funzioni analitiche locali detto insieme singolare. Il problema dell'immersione dovrà, in tale caso, essere opportunamente riformulato.

1.1 Glossario

Sia $F : X \to M$ un'applicazione olomorfa tra varietà analitiche complesse.

F è un'*immersione* se dF è iniettivo in ogni punto di X.

F è un *embedding* se è un'immersione iniettiva.

Un embedding F si dice *localmente proprio* se è un omemorfismo su $F(X)$ dotato della topologia indotta da quella di M.

Un embedding F si dice *chiuso* se è un'applicazione propria. Se X è uno spazio analitico complesso e M è una varietà complessa, un'applicazione olomorfa $F : X \to M$ è un' embedding se è iniettiva e $F|_{X \setminus Sing(X)}$ è un'immersione.

Sia $D \subset \mathbb{C}^n$ un sottoinsieme aperto, $\phi : D \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Sia $z \in \mathbb{C}^n$. La forma hermiteana

$$\mathcal{L}(\phi, z) = \sum_1^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial \overline{z}_j \partial z_k}(z)\, \overline{w}_j w_k$$

per $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ è detta la *forma di Levi* di ϕ in z. Diremo che ϕ è *q-plurisubarmonica* (q-psh) in D se l'indice di positività di $\mathcal{L}(\phi, z)$ è $\geq n - q$, per ogni $z \in D$.

Con questa convenzione, 0-plurisubarmonica $\Longrightarrow$ plurisubarmonica nel senso classico.

Sia X uno spazio analitico complesso, $\psi : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. ψ si dice q-plurisubarmonica, se per ogni punto $p \in X$, esiste un intorno aperto U di p, un'applicazione biolomorfa f da U su di un sottoinsieme analitico di un aperto $D \subset \mathbb{C}^n$, ed una funzione q-plurisubarmonica $\phi : D \to \mathbb{R}$ tale che:

(i) $\psi = \phi \circ f$

(ii) $\overline{\{p \in U : \psi(p) < c\}} = \{p \in U : \psi(p) \leq c\}$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Uno spazio analitico X si dice:

(a) *olomorficamente separato* se comunque si prendano $x, y \in X$ con $x \neq y$, esiste una funzione olomorfa f tale che $f(x) \neq f(y)$.

(b) *olomorficamente convesso* se per ogni $K \subset X$ sottoinsieme compatto, l'insieme

$$\hat{K} = \{x \in X : |f(x)| \leq \sup_{y \in K} ||f(y)||, \text{per ogni } f \text{ olomorfa}\}$$

è a sua volta compatto in X.

(c) *q-convesso* se esiste $\phi : X \to (-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che $\{p \in X : \phi(p) \leq c\}$ è compatto per ogni $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ed esiste $b' \in [-\infty, b)$, tale che ϕ è q-psh in $\{\phi > b'\}$.

(d) *p-concavo* se esiste $\phi : X \to (a, +\infty)$, $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ tale che $\{p \in X : \phi(p) \geq c\}$ è compatto per ogni $c \in (a, +\infty)$, ed esiste $a' \in (a, +\infty]$ tale che ϕ è q-psh in $\{\phi < a'\}$.

(e) *(q, p)-convesso–concavo* se esiste $\phi : X \to (a, b)$, $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propria, tale che esistono $a' \in (a, +\infty]$ e $b' \in [-\infty, b)$, tali che $a < a' < b' < b$ e ϕ è q-psh per $\{\phi > b'\}$ e p-psh per $\{\phi < a'\}$.

(f) *q-completo* se è q-convesso e si può prendere $b' = -\infty$.

La funzione ϕ di cui alle definizioni (c)–(f) è detta una *funzione di esaustione* di X. Le definizioni (c)–(f) sono dovute essenzialmente ad Andreotti-Grauert [3]. Si osservi che se X è compatto, e $\dim X = n$, X è (q, p)-convesso–concavo per ogni $0 \leq q, p \leq n$. Ogni spazio analitico di dimensione n privo di componenti irriducibili compatte di dimensione n è $(n-1)$-completo (Ohsawa [29]) e $(n-1)$-concavo, (Coltoiu [12]).

La nozione di convessità olomorfa è una nozione pertinente alla teoria delle Algebre di Funzioni, mentre la nozione di q-convessità è una nozione di "pseudo"-convessità geometrica. La ricerca di una relazione fra le due nel caso $q = 0$ (problema di E.E. Levi) ha impegnato gli analisti complessi nella prima metà del secolo XX. Uno spazio olomorficamente separato ed olomorficamente convesso è detto uno *spazio di Stein*. Il quoziente di uno spazio olomorficamente convesso per la relazione di equivalenza che identifica i punti non separati dalle funzioni olomorfe è uno spazio di Stein, (Remmert [30]). Uno spazio 0-convesso è olomorficamente convesso, e ϕ può essere scelta 0-psh al di fuori di un sottoinsieme analitico compatto massimale (Grauert [18]). Ivi le funzioni olomorfe separano i punti, quindi se il sottoinsieme analitico compatto massimale è costituito da un numero finito di punti, uno spazio 0-completo è di Stein. Il viceversa, cioè che uno spazio di Stein è 0-completo, è detto la soluzione del problema di Levi, ed è dimostrato da Grauert [17]).

1.2 I vari problemi di immersione di uno spazio complesso. Modelli e loro sedi

Introdurremo ora le sedi M dei modelli A che sono considerati per il problema dell' immersione di uno spazio complesso in termini di una proprietà goduta da M e da A e da uno spazio X dato astrattamente che, come abbiamo visto, non potrà limitarsi a quella di essere uno spazio analitico complesso.

Siano dunque M una varietà analitica complessa, $A \subset M$ un sottoinsieme analitico proprio.

(1.2.1) Sia X uno spazio analitico compatto. Siano $M = \mathbb{CP}_n$ e A chiuso. La proprietà goduta da M e da A è: A è algebrica proiettiva (per un risultato classico, Lemma di Chow [11], proprietà ovviamente goduta anche da M). Il problema dell'immersione proiettiva di X consiste quindi nel domandarsi quando esso è analiticamente equivalente ad una varietà algebrica proiettiva. Delle condizioni necessarie devono essere soddisfatte, cioè X deve ammettere una metrica Kähleriana e il grado di trascendenza su $\mathbb{C}$ del campo delle funzioni meromorfe su X deve essere eguale alla dimensione di X, il che limita la classe di spazi compatti che possono essere considerati.

(1.2.2) Sia X uno spazio di Stein. Siano $M = \mathbb{C}^n$ e A chiuso. La proprietà (ovviamente) goduta da M e da A è: M e A sono di Stein. In assenza di condizioni necessarie aggiuntive alla Steinicità, il problema dell'immersione di X consiste quindi nel domandarsi se X è analiticamente equivalente ad un sottoinsime analitico chiuso di M.

(1.2.3) Sia X uno spazio q-completo. Siano $M = \mathbb{CP}_n \setminus \mathbb{CP}_{n-q-1}$ e A chiuso. M è q-completa (Andreotti–Norguet [4]) quindi A è ovviamente q-completo. Il problema dell'immersione di X consiste quindi nel domandarsi quando esso è analiticamente equivalente ad un $A \subset M$ siffatti. Delle condizioni necessarie devono essere soddisfatte, cioè X non deve avere funzioni olomorfe non costanti sulle sue componenti irriducibili, deve ammettere una metrica Kähleriana e il grado di trascendenza su $\mathbb{C}$ del campo delle funzioni meromorfe su X deve essere eguale alla dimensione di X, il che limita la classe di spazi q-completi che possono essere considerati.

(1.2.4) Sia X uno spazio olomorficamente convesso. Siano $M = \mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}_m$ e A chiuso. La proprietà (ovviamente) goduta da M e da A è: M e A sono olomorficamente convessi. Il problema dell'immersione di X consiste quindi nel domandarsi quando esso è analiticamente equivalente ad un $A \subset M$ siffatti. Una condizione necessaria deve essere soddisfatta, cioè X deve ammettere una metrica Kähleriana.

(1.2.5) Sia X uno spazio p-concavo. Siano $M = \mathbb{CP}_n$ e A aperto, $A = \mathbb{CP}_n \setminus Z$, con Z sottovarietà liscia di $\dim p$. M è (ovviamente) p-concavo (per ogni p) e non è difficile mostrare che A è p-concavo. Il problema dell'immersione (quasi-proiettiva) di X consiste quindi nel domandarsi quando esso è analiticamente equivalente ad un $A \subset M$ siffatti. Delle condizioni necessarie devono essere soddisfatte, cioè X non deve avere funzioni olomorfe non costanti sulle sue componenti irriducibili, deve ammettere una metrica Kähleriana e il grado di trascendenza su $\mathbb{C}$ del campo delle funzioni meromorfe su X deve essere eguale alla dimensione di X, il che limita la classe di spazi p-concavi che possono essere considerati.

(1.2.6) Sia X uno spazio $(0,0)$-convesso-concavo. Siano $M = \mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}_N \times \mathbb{CP}_m$ e $A = A' \times (\mathbb{CP}_m \setminus Z)$ con A' sottoinsieme analitico chiuso di $\mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}_N$ e $Z = \{z_1, \ldots, z_k\}$, $z_i \in \mathbb{CP}_m$. A è $(0,0)$-convesso-concavo. Il problema dell'immersione di X consiste quindi nel domandarsi quando esso è analiticamente equivalente ad un $A \subset M$

siffatti. Una condizione necessaria deve essere soddisfatta, cioè X deve ammettere una metrica Kähleriana.

Vale la pena di rimarcare che per il problema (1.2.4), gli spazi olomorficamente convessi considerati in letteratura sono quelli 0-convessi e che non esistono risultati per il caso q-convesso per $q > 0$.

2 Il caso di uno spazio compatto

Sia X uno spazio analitico complesso compatto di dimensione n. In questo caso le funzioni olomorfe su X sono solo le costanti. Vi possono però essere funzioni meromorfe non costanti. Una n-upla di tali funzioni dà un'applicazione da X in $\mathbb{CP}_n$. Il problema dell'immersione dello spazio compatto X è quindi equivalente al problema dell'esistenza di un numero sufficiente di funzioni meromorfe non costanti che separino i punti di X e che siano analiticamente indipendenti. Se $n = 1$, un teorema classico di Riemann dà l'esistenza di funzioni meromorfe non costanti. Il campo delle funzioni meromorfe su X è un'estensione finitamente generata di $\mathbb{C}$. Se $n \geq 2$, un teorema di Siegel [33] dice che il grado di trascendenza su $\mathbb{C}$ del campo delle funzioni meromorfe è un intero compreso fra 0 e n. Ora, se A è una varietà algebrica proiettiva di dimensione n il grado di trascendenza su $\mathbb{C}$ del campo delle funzioni meromorfe su A è uguale ad n. La condizione grado di trascendenza su $\mathbb{C}$ del campo delle funzioni meromorfe su X uguale alla dimensione di X è quindi necessaria affinché X sia analiticamente equivalente ad una varietà proiettiva. Tale condizione è anche sufficiente nel caso dei tori complessi per un classico Teorema di Lefschetz, si veda ad es. [25]. Questo non è però il caso in generale (si vedano esempi [21] [24]): vi sono spazi complessi compatti X con grado di trascendenza su $\mathbb{C}$ del campo delle funzioni meromorfe su X uguale alla dimensione di X che non sono analiticamente equivalenti a varietà proiettive. Un'intuizione fondamentale di Kodaira è stata che, essendo le funzioni meromorfe sullo spazio compatto X identificabili a sezioni analitiche di opportuni fibrati olomorfi lineari, l'esistenza di un numero sufficiente di funzioni meromorfe non costanti che separino i punti di X e che siano analiticamente indipendenti è equivalente all'esistenza di un fibrato lineare su X dotato di una metrica hermitiana lungo le fibre che sia a curvatura positiva. Tale condizione è stata interpretata successivamente da Grauert in termini di concavità dello spazio totale del fibrato in questione. Riassumendo:

TEOREMA 2.1 *(Riemann) Sia X uno spazio analitico complesso compatto di dimensione 1, esiste un embedding $F : X \to \mathbb{CP}_3$.*

TEOREMA 2.2 *(Kodaira [22], caso liscio, Grauert [18], caso singolare) Sia X uno spazio analitico complesso compatto di dimensione $n \geq 1$.*

Esiste $F : X \to \mathbb{CP}_N$ embedding se e solo se $\exists \quad \mathbb{L} \to X$ fibrato lineare olomorfo il cui spazio totale è 0-concavo.

Il problema dell'immersione proiettiva (1.2.1) di uno spazio complesso compatto è quindi da tempo completamente risolto.

3 Il caso non compatto

3.1 Il caso di una varietà di Stein

Il problema dell'immersione di una varietà di Stein, (1.2.2) con modello liscio, ha fortemente impegnato gli analisti e geometri complessi per tutti gli anni 60 fino alla prima metà degli anni 70. Sembra interessante presentare i principali risultati nella loro successione temporale.

TEOREMA 3.1 *(Narasimhan [26]) Sia X una varietà di Stein di dimensione 1.*

Esiste $F : X \to \mathbb{C}^3$ embedding chiuso.

TEOREMA 3.2 *(Remmert [31], Narasimhan [27]) Sia X una varietà di Stein di dimensione $n \geq 1$.*

Esiste $F : X \to \mathbb{C}^{2n+1}$ embedding chiuso.

Il metodo di Remmert e Narasimhan consiste nel dimostrare la densità degli embeddings in un'opportuna classe di applicazioni olomorfe con argomenti di categorie di Baire. Ciò richiede un'analisi assai complicata. Il loro risultato viene in seguito migliorato da O. Forster con metodi completamente differenti ed assai più semplici:

TEOREMA 3.3 *(Forster [15]) Sia X una varietà di Stein di dimensione n. Se $2 \le n \le 5$, esiste $F : X \to \mathbb{C}^{2n}$ embedding chiuso, se $n \ge 6$, $M = \mathbb{C}^{2n-\left[\frac{n-2}{3}\right]}$, esiste $F : X \to M$ embedding chiuso.*

Per $n \le 5$ il risultato di Forster non è migliorabile come mostra l'esempio seguente.

Una varietà di Stein X di dimensione n si dice *parallelizzabile* se esistono n campi di vettori olomorfi linearmente indipendenti in ogni punto di X. Un teorema di Grauert [19] dice che una varietà di Stein è parallelizzabile se e solo se esistono n campi di vettori *continui* linearmente indipendenti in ogni punto di X. O. Forster, in [16], mostra che ogni ipersuperficie di $\mathbb{C}^N$ è parallelizzabile.

Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{CP}_2 : x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\}$. X è una varietà di Stein; mostreremo che X non è parallelizzabile e quindi non potrà essere analiticamente equivalente ad alcuna ipersuperficie di $\mathbb{C}^3$. Per il teorema di Grauert sarà sufficiente utilizzare argomenti di sola natura topologica. Per questi ragioni, una varietà di Stein di dimensione ≤ 5 è parallelizzabile se e solo se le classi di Chern c_1 e c_2 del suo fibrato tangente sono nulle. Definiamo un retratto di deformazione $F_t : X \to X$ di X su $\mathbb{RP}_2$ come

$$F_t\,(x, y, z) = (\mathrm{Re}x + it\mathrm{Im}x, \mathrm{Re}y + it\mathrm{Im}y, \mathrm{Re}z + it\mathrm{Im}z).$$

Sia T il fibrato tangente di X. Vogliamo calcolare le classi di Stiefel-Whitney di T come fibrato reale. E' sufficiente calcolarle per la restrizione di T a $\mathbb{RP}_2$. Tale restrizione è la complessificazione del fibrato tangente reale T_0 di $\mathbb{RP}_2$ ed è quindi isomorfa a $T_0 \oplus T_0$. Sia $\alpha \in H^1(\mathbb{RP}_2, \mathbb{Z}_2)$ il generatore dell'anello di coomologia $H^*(\mathbb{RP}_2, \mathbb{Z}_2)$. La classe totale di Stiefel-Whitney w di T_0 è $w\,(T_0) = (1 + \alpha)^3$. Ne segue $w(T_0 \oplus T_0) = (1 + \alpha)^6 = 1 + \alpha^2$. Sia β l'elemento non nullo di $H^2(X, \mathbb{Z}) = H^2(\mathbb{RP}_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$. Poichè la seconda classe di Stiefel-Whitney è la riduzione modulo 2 della prima classe di Chern, ne segue che $c_1 = \beta$ e quindi X non è parallelizzabile.

Per n molto grande il risultato di Forster viene, con gli stessi metodi, raffinato successivamente:

TEOREMA 3.4 *(Schaft [32]) Sia X una varietà di Stein di dimensione n. Se $M = \mathbb{C}^{2n-[3n/7-14]}$, esiste $F : X \to M$ embedding chiuso.*

Se ci si acccontenta di sole immersioni, per n piccolo l'esponente della sede del modello si può ridurre drasticamente:

TEOREMA 3.5 *(Gunning-Narasimhan [20]) Sia X una varietà di Stein di dimensione* 1*.*

Esiste $F : X \to \mathbb{C}$, immersione.

TEOREMA 3.6 *(Forster [15]) Sia X una varietà di Stein di dimensione n, $2 \le n \le 5$, $M = \mathbb{C}^{2n-1}$, esiste $F : X \to M$, immersione.*

Una parola forse definitiva per la soluzione del problema dell'immersione di una varietà di Stein in uno spazio numerico fu annunciata da Gromov-Eliashberg nel 1971. Una dimostrazione completa di tale risultato con miglioramenti è apparsa solo nel 1992:

TEOREMA 3.7 *(Eliashberg-Gromov [14]) Sia X una varietà di Stein di dimensione n.*

Se $M = \mathbb{C}^{\left[\frac{3n}{2}+1\right]}$, esiste $F : X \to M$, embedding chiuso.

Il metodo di Eliashberg-Gromov è di natura geometrico-topologica e la dimostrazione del risultato piuttosto difficile. Essa è fondata sul cosiddetto principio di Oka-Grauert che, filosoficamente, consiste nel dimostrare che in uno spazio di Stein ciò che è vero per oggetti continui rimane vero per oggetti olomorfi (si veda l'esempio precedente). In questo caso il principio si applica a sezioni olomorfe di submersioni. Ciò detto, l'esempio menzionato precedentemente mostra che l'esponente $\left[\frac{3n}{2} + 1\right]$ non è abbassabile; quindi esso è il migliore possibile per n pari ed è al più migliorabile di 1 per n dispari. Questa è l'unica questione rimasta aperta per il problema d'immersione (1.2.2).

3.2 Il caso di uno spazio di Stein singolare

Il problema dell'immersione di uno spazio di Stein con singolarità non può essere affrontato coi metodi di Forster nè con quelli di Gromov-Eliashberg descritti nella sezione precedente. L'investigazione è ferma pertanto all'inizio degli anni 60:

TEOREMA 3.8 *(Bishop [10], Narasimhan [27]) Sia X uno spazio analitico complesso di Stein di dimensione $n \geq 1$.*

Esiste $F : X \to \mathbb{C}^{2n+1}$, embedding chiuso (cioé in questo caso F è propria, iniettiva e $F|_{X \setminus Sing(X)}$ è un'immersione, vedi la sezione 1.1).

La dimostrazione di Narasimhan è in questo caso quella menzionata nella sezione precedente. Le tecniche di Bishop sono assai diverse. Gli embeddings vengono parametrizzati opportunamente da dischi analitici; la dimostrazione è assai originale seppur complicata.

Nel caso si voglia controllare anche ciò che avviene sull'insieme singolare bisogna restringere la classe di spazi di Stein considerati:

DEFINIZIONE 3.1 *Sia X uno spazio analitico complesso tali che esistono $G : X \to \mathbb{C}^N$ ed un polidisco $U \subset \mathbb{C}^N$ tale che $G|_V$ sia biolomorfa su un sottospazio analitico chiuso di U. X si dice realizzabile in un polidisco per mezzo di sezioni globali.*

Segue che uno spazio X realizzabile in un polidisco per mezzo di sezioni globali è di Stein. Si ha:

TEOREMA 3.9 *(Narasimhan [27]) Sia X uno spazio realizzabile in un polidisco per mezzo di sezioni globali*

Esiste $F : X \to \mathbb{C}^{n+N}$ embedding chiuso, che è biolomorfa anche su $Sing(X)$.

3.3 Il caso di uno spazio 0-convesso

E' facile accorgersi che la soluzione del problema di immersione (1.2.4) per spazi olomorficamente convessi X che siano 0-convessi dipende dalla possibilità di immergere proiettivamente il sottoinsieme analitico compatto massimale di X:

TEOREMA 3.10 *(A. Silva [35]) Sia $M = \mathbb{C}^{2n+1} \times \mathbb{CP}_{n+1}$. Sia X uno spazio 0-convesso con insieme eccezionale E, ed $\exists$ $\mathbb{L} \to X$ fibrato lineare olomorfo tale che lo spazio totale di $\mathbb{L}|E$ è 0-concavo, allora esiste $F : X \to M$ embedding chiuso.*

Diremo quindi che lo spazio 0-convesso X è *immergibile* se soddisfa alla condizione del Teorema precedente. Si ha:

TEOREMA 3.11 *(Banica [8]) Sia X uno spazio 0-convesso di dimensione 2, privo di componenti irriducibili compatte. X è immergibile.*

Più in generale, per il caso liscio, vi è un importante risultato di Coltoiu:

TEOREMA 3.12 *(Coltoiu [13]) Sia X una varietà complessa 0-convessa di dimensione n con insieme eccezionale E irriducibile di dimensione 1. X è immergibile con l'unica possibile eccezione $\dim X = 3$ e E razionale.*

Poiché $\mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}_m$ è Kähleriano, la Kählerianità di X è necessaria per la sua immergibilità. Molto recentemente Alessandrini-Bassanelli mostrano che in molti casi tale condizione è anche sufficiente (sempre quando la dimensione dell'insieme eccezionale è 1):

TEOREMA 3.13 *(Alessandrini-Bassanelli [1]) Sia X una varietà complessa 0-convessa di dimensione n con insieme eccezionale E di dimensione 1. Si supponga che $H_2(X, \mathbb{Z})$ sia finitamente generato. Sono equivalenti: X è immergibile, X è käleriano.*

Alessandrini-Bassanelli dimostrano anche che la proprietà che X possegga una metrica kahleriana è caratterizzata da una proprietà dell'insieme eccezionale E: X è infatti kähleriano se e solo se X non è di dimensione 3 oppure E non contiene alcuna curva la cui classe sia nulla in $H_2(X, \mathbb{Z})$ le cui componenti irriducibili sono curve razionali. Le tecniche che questi autori usano sono innovative riguardo al problema considerato. In particolare la dualità fra forme e correnti è utilizzata per la prima volta nel caso di una varietà non compatta.

3.4 Il caso di uno spazio p-concavo

Uno spazio p-concavo non possiede funzioni olomorfe non costanti. A. Andreotti [2] ha dimostrato che per essi vale l'analogo del Teorema di Siegel: il grado di trascendenza su $\mathbb{C}$ del corpo delle funzioni meromorfe su uno spazio p-concavo è un intero compreso fra 0 e la dimensione dello spazio. Come nel caso compatto le condizioni sufficienti per l'immergibilità degli spazi p-concavi dovranno permettere l'esistenza di un numero sufficiente di funzioni meromorfe algebricamente indipendenti che separano i punti dello spazio stesso. Se

X è uno spazio complesso ed $\mathbb{L} \to X$ un fibrato in rette, diremo che $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Gamma(X, \mathcal{O}(\mathbb{L}^k))$ separa i punti di X se

$$\forall\ (x, y)\ \in X,\ x \neq y,\ \exists k \in \mathbb{N}\, s, \sigma \in H^0(X, \mathcal{O}(\mathbb{L}^k))$$

tale che

$$\det \begin{pmatrix} s\,(x) & \sigma\,(x) \\ s\,(y) & \sigma\,(y) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Diremo che $\Gamma(X, \mathcal{O}(\mathbb{L}^k))$ dà coordinate locali se per ogni $x \in X$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che esistono n sezioni di $H^0(X, \mathcal{O}(\mathbb{L}^k))$ analiticamente indipendenti in x. Per il caso $p = 0$ abbiamo:

TEOREMA 3.14 *(caso liscio Andreotti-Tomassini [6], caso singolare Andreotti-Siu [5]) Sia $Y \subset \mathbb{CP}_N$ una sottovarietà algebrica e $A = Y \setminus Z$, con $Z = \{z_1, \dots, z_k\} \subset Y$. Sia X uno spazio analitico complesso 0-concavo di dimensione 2 e si supponga che $\exists\quad \mathbb{L} \to X$ fibrato lineare olomorfo tale che $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Gamma(X, \mathcal{O}(\mathbb{L}^k))$ separa i punti e dà coordinate locali. Ne segue che esiste $F : X \to \mathbb{CP}_N$ embedding localmente proprio tale che $F\,(X) = A$.*

Se $n \geq 3$, la condizione che $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Gamma(X, \mathcal{O}(\mathbb{L}^k))$ separa i punti di X diventa una conseguenza. Si ha infatti:

TEOREMA 3.15 *(caso liscio Andreotti-Tomassini [6], caso singolare Andreotti-Siu [5]) Sia $Y \subset \mathbb{CP}_N$ una sottovarietà algebrica e $A = Y \setminus Z$, con $Z = \{z_1, \dots, z_k\} \subset Y$. Sia X uno spazio analitico complesso 0-concavo di dimensione $n \geq 3$ e si supponga che $\exists\quad \mathbb{L} \to X$ fibrato lineare olomorfo tale che $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Gamma(X, \mathcal{O}(\mathbb{L}^k))$ dà coordinate locali. Ne segue che $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Gamma(X, \mathcal{O}(\mathbb{L}^k))$ separa in punti di X ed esiste $F : X \to \mathbb{CP}_N$ embedding localmente proprio tale che $F\,(X) = A$.*

Per $p \leq n - 2$ qualsiasi, si ha un risultato nel caso liscio con ipotesi rafforzata sulla funzione di esaustione:

TEOREMA 3.16 *(Tomassini [36]) Siano Y, Z sottovarietà di $\mathbb{CP}_N$ con $Z \subset Y$ e $\dim Z = p$, $p \leq n - 2$, e sia $A = Y \setminus Z$. Sia X una varietà p-concava con funzione di esaustione con forma di Levi semidefinita positiva in ogni punto di X. Si supponga che $\exists\quad \mathbb{L} \to X$ fibrato lineare olomorfo tale che $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Gamma(X, \mathcal{O}(\mathbb{L}^k))$ separa i punti e dà coordinate locali. Ne segue che esiste $F : X \to \mathbb{CP}_N$ embedding localmente proprio tale che $F\,(X) = A$.*

3.5 Il caso di uno spazio $(0,0)$-convesso-concavo

Per il caso misto convesso-concavo vi è un solo risultato conosciuto:

TEOREMA 3.17 *(A. Silva [34]) Sia* $M = \mathbb{C}^N \times \mathbb{CP}_n \times \mathbb{CP}_m$ *e* $A = A' \times (\mathbb{CP}_m \setminus Z)$ *con* A' *sottoinsieme analitico chiuso di* $\mathbb{C}^N \times \mathbb{CP}_n$ *e* $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$, $z_i \in \mathbb{CP}_m$. *Sia* X *uno spazio* $(0,0)$*-convesso–concavo e supponiamo che* $\exists\, \mathbb{L} \to X$ *fibrato lineare olomorfo tale che* $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Gamma(X, \mathcal{O}(\mathbb{L}^k))$ *separa i punti e dà coordinate locali, allora esiste* $F : X \to M$ *embedding localmente proprio tale che* $F(X) = A$.

3.6 Miscellanea

In questa sezione enunciamo due importanti risultati che sono connessi al problema dell'immersione degli spazi complessi.

Con i metodi di Analisi Complessa da lui utilizzati per risolvere il problema di E.E. Levi, Grauert [17] ottiene il seguente risultato:

TEOREMA 3.18 *Sia* X *una varietà analitica reale di dimensione* n. *Esiste un embedding chiuso di* X *in* $\mathbb{R}^{2n}$.

Andreotti e Vesentini provano un risultato di immersione quasi-proiettiva di tipo Kodaira senza alcuna ipotesi di convessità o concavità della varietà:

TEOREMA 3.19 *(Andreotti-Vesentini [7]) Sia* X *una varietà analitica complessa,* $\mathbb{L} \to X$ *fibrato lineare olomorfo il cui spazio totale è* 0*-concavo. Se lo spazio totale di* $\mathbb{L}^{-1} \otimes \mathcal{K}_X$ *è* 0*-concavo ed una metrica hermitiana su di esso è completa, allora* X *ammette un embedding localmente proprio su un aperto in una varietà proiettiva. (*$\mathcal{K}_X$ *fibrato canonico di* X*.)*

4 Risultati recenti

La ricerca recente sul problema dell'immersione di uno spazio complesso concerne il caso q-completo (1.2.3). Non vi erano stati risultati in questo caso fino al 1993, quando D. Barlet e A.Silva hanno considerato il problema dal punto di vista della convessità olomlorfa introducendo una nozione di convessità olomorfa intermedia che si è rivelata opportuna per il problema considerato (Barlet–Silva [9]). Lo scopo iniziale della loro ricerca è duplice: comprendere la natura dei sottospazi analitici di $\mathbb{CP}_n \setminus \mathbb{CP}_{n-q-1}$ e caratterizzare gli spazi q-completi analiticamente equivalenti a tali sottospazi. Per $q = 0$ essi sono evidentemente gli spazi di Stein, mentre per $q \geq 1$ due condizioni devono essere necessariamente soddisfatte: non esistono su tali spazi funzioni olomorfe non costanti ed essi devono ammettere una metrica kähleriana. Queste condizioni necessarie riducono la classe di spazi q-completi da considerare, infatti per esempio se Y è compatto di dimensione q e non Kähleriano (dunque $q \geq 2$) ogni prodotto $Y \times S$, con S di Stein, è q-completo e non soddisfa questa condizione. Per $q = 1$ consideriamo X superficie compatta connessa non Kähleriana. Ne segue che per $x_0 \in X$, $X \setminus \{x_0\}$, è 1-completo [29] e non verifica la proprietà voluta.

Si può partire da un'osservazione elementare: siano $(z_0, \ldots, z_N)$ coordinate in $\mathbb{CP}_N$. Consideriamo:

$$\mathbb{CP}_q = \{(z_0, \ldots, z_N) \in \mathbb{CP}_N : z_i = 0, i = q+1, \ldots, N\}$$

per $0 < q < N$, e

$$\mathbb{CP}_{N-q-1} = \{(z_0, \ldots, z_N) \in \mathbb{CP}_N : z_i = 0, i = 0, \ldots, q\}.$$

Abbiamo un'applicazione

$$\pi : \mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1} \to \mathbb{CP}_q$$

definita da $\pi(z_0, \ldots, z_q, z_{q+1}, \ldots, z_N) = (z_0, \ldots, z_q, 0, \ldots, 0)$.

Ne segue che $z_0, \ldots, z_q$ non possono essere simultaneamente nulle. Se le consideriamo come sezioni di $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}_q}(1))$ possiamo dire che $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}_q}(1))$ definisce l'applicazione π per la proprietà precedente. Inoltre le fibre di π sono olomorficamente convesse in quanto eguali a $\mathbb{C}^{n-q-1}$. Ciò suggerisce la seguente definizione:

Definizione 4.1 *Sia X uno spazio analitico complesso ridotto con un fibrato lineare $\mathbb{L} \to X$ tale che esistono $s_0, \ldots, s_q \in \Gamma(X, \mathcal{O}(\mathbb{L}))$ senza zeri comuni. Esse quindi definiscono un'applicazione $\pi : X \to \mathbb{CP}_q$, data da $\pi(x) = (s_0(x), \ldots, s_q(x))$ dunque $\mathbb{L} = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q}(1)$. Ne segue che l'applicazione $x \to ||\zeta_x||_s$, $x \in X$, $\zeta_x \in \mathbb{L}_x$ con*

$$||\zeta_x||_s = \frac{|\zeta_x|}{||\pi(x)||_0}$$

e

$$||\pi(x)||_0^2 = \sum_{i=0}^{q} |s_i(x)|^2$$

è una metrica hermiteana C^∞ lungo le fibre di $\mathbb{L}$. Poniamo $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\mathbb{L})$.

X si dice **olomorficamente q-convesso** se per ogni K, $K \subset X$, K compatto, l'insieme

$$\widehat{K} = \left\{ y \in X : \forall\, \sigma \in \Gamma(X, \mathcal{L}) \text{ si ha } ||\sigma(y)||_s \le \sup_{x \in K} ||\sigma(x)||_s \right\},$$

è un sottoinsieme compatto di X.

La definizione non dipende da π ovviamente ed un po' più difficoltosamente si mostra che $\widehat{K}$ non dipende dalla metrica $||\cdot||_s$. Nessuna menzione esplicita verrà quindi fatta nel seguito della struttura hermiteana sottogiacente se non richiesto dal contesto. In generale sarà scelta in modo che corrisponda a $||\cdot||_0$, i.e. $s_0, \dots, s_q$ è ortonormale. Uno spazio olomorficamente q-convesso X sarà denotata da (X, π) ovvero $\pi : X \to \mathbb{CP}_q$.

Sia $\pi : X \to \mathbb{CP}_q$ uno spazio olomorficamente q-convesso. Siano $\pi = (s_0, \dots, s_q)$, $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_q) \in \mathbb{CP}_q$ con $\zeta_0 \neq 0$ e $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{L})$. Possiamo supporre X irriducibile. Consideriamo la funzione

$$f_\sigma(x) = \frac{\sigma(x)}{s_0(x)}$$

che è olomorfa per $x \in \pi^{-1}(\zeta)$. Sia $K \subset \pi^{-1}(\zeta)$ un sottoinsieme compatto e $\widehat{K}$ il suo inviluppo olomorficamente q-convesso rispetto a $\mathcal{L}$. $||\pi(y)||_0$ and $|s_0(y)|$ sono costanti per $y \in \pi^{-1}(\zeta)$, quindi:

$$\begin{aligned} \widehat{K} \cap \pi^{-1}(\xi) &= \left\{ y \in \pi^{-1}(\xi) : ||\sigma(y)||_s \le \sup_{x \in K} ||\sigma(x)||_s \right\} \\ &= \left\{ y \in \pi^{-1}(\xi) : |f_\sigma(y)| \le \sup_{x \in K} |f_\sigma(x)| \right\} \supset \widetilde{K}, \end{aligned}$$

$\widetilde{K}$, inviluppo olomorficamente convesso di K rispetto a $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(\zeta)}$. Ne segue che $\widetilde{K}$ è un sottoinsieme compatto di $\pi^{-1}(\zeta)$, quindi le fibre di π sono olomorficamente convesse nel senso usuale.

Se $q = 0$, π è costante, $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$, s_0 non si annulla mai in X e X è olomorficamente convesso. Il viceversa è ovvio. Dunque X è olomorficamente 0-convesso se e solo se X è olomorficamente convesso nel senso usuale.

4.1 Esempi

1. *Un sottospazio chiuso Y dello spazio olomorficamente q-convesso (X, π) è olomorficamente q-convesso. In particolare, ogni componente irriducibile di uno spazio olomorficamente q-convesso è olomorficamente q-convessa.*

Più in generale:

2. *Sia $\pi : X \to \mathbb{CP}_q$ uno spazio olomorficamente q-convesso, Y uno spazio complesso e $f : Y \to X$ olomorfa, propria e suriettiva. $f \circ \pi : Y \to \mathbb{CP}_q$ è uno spazio olomorficamente q-convesso.*

Abbiamo visto che:

3. *Tutti gli spazi olomorficamente convessi nel senso usuale sono olomorficamente 0-convessi.*

4. *Sia X una varietà proiettiva liscia e $\mathcal{L}$ un fibrato lineare su X tale che per ogni $x \in X$ esiste $s_x \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ con $s_x(x) \neq 0$. Sia $s_0, \dots, s_q \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ non identicamente nulle e poniamo*

$$Y = \{y \in X : s_0(y) = \dots = s_q(y) = 0\}.$$

$(X \setminus Y, \pi)$ è uno spazio olomorficamente q-convesso ove si prenda $\pi : X \setminus Y \to \mathbb{CP}_q$ data da

$$\pi(x) = (s_0(x), \dots, s_q(x)).$$

5. *Sia $\pi : \mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1} \to \mathbb{CP}_q$ la proiezione data da $\pi(z_0, \dots, z_q, z_{q+1}, \dots, z_N) = (z_0, \dots, z_q, 0, \dots, 0)$. $(\mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1}, \pi)$ è uno spazio olomorficamente q-convesso.*

6. (Domini fibrati con palle su $\mathbb{CP}_q$). *Per ogni funzione continua $\alpha : \mathbb{CP}_q \to \mathbb{R}^+$, il dominio di $\mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1}$*

$$\mathcal{P}_\alpha = \left\{(z_0, \dots, z_N) : \alpha^2(z_0, \dots, z_q)\left(\sum_{i=q+1}^{N} |z_i|^2\right) < \sum_{i=0}^{q} |z_i|^2\right\}$$

ove si prenda la proiezione π come in 5 *è uno spazio olomorficamente q-convesso.**

7. *(Domini fibrati con polidischi su $\mathbb{CP}_q$.) Per ogni funzione continua $r_j : \mathbb{CP}_q \to \mathbb{R}^+$, $j = q+1, \ldots, N$ il dominio di $\mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1}$*

$$\mathcal{P}_{r_{q+1},\ldots,r_N} = \Big\{(z_0,\ldots,z_N) : \\ r_j^2(z_0,\ldots,z_q)\,|z_j|^2 < \sum_{i=0}^{q} |z_i|^2,\ j = q+1,\ldots,N\Big\}$$

ove si prenda la proiezione π come in 5 *è uno spazio olomorficamente q-convesso.*

E' un risultato difficile di Barlet-Silva, *loc.cit.,*che uno spazio olomorficamente q-convesso si caratterizza mediante funzioni di esaustione:

Teorema 4.1 *Siano X uno spazio analitico complesso ridotto, $\mathbb{L} \to X$ un fibrato lineare olomorfo che induce $\pi : X \to \mathbb{CP}_q$. Si supponga* $\dim H^0(X, \mathcal{L}) < +\infty$.

(X, π) è uno spazio olomorficamente q-convesso se e solo se X ammette una funzione esaustiva ϕ di classe C^0 della forma

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{|\sigma_j(x)^2|}{||\pi(x)||_0^2} \right)^{\alpha_j}$$

per $\sigma_j \in H^0(X, \mathcal{L})$ e $\alpha_j \in \mathbb{N}^*$ con convergenza uniforme sui compatti di X.

Gli stessi autori propongono la seguente definizione:

Definizione 4.2 *Uno spazio olomorficamente q-convesso tale che $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}_q}(1))$ separa i punti di X si dice q-Stein.*

Gli esempi $5, 6, 7$ di cui sopra sono esempi "concreti" di spazi di q-Stein.

Barlet e Silva dimostrano che uno spazio di q-Stein è la riduzione di Remmert (cioè il quoziente per la relazione di equivalenza che

*Per α costante uguale a zero, $\mathcal{P}_0 = \mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1}$.

identifica i punti non separati da $\mathcal{L}$. La difficoltà consiste nel mostrare che tale quoziente è uno spazio analitico) di uno spazio olomorficamente q-convesso. Dimostrano inoltre il seguente basilare risultato:

TEOREMA 4.2 *Uno spazio di q-Stein è q-completo.*†

Essi passano poi a considerare il problema dell'immersione degli spazi q-Stein, ottenendo che se U è un aperto relativamente compatto della varietà q-Stein X esiste $F : X \to \mathbb{CP}_n \setminus \mathbb{CP}_{n-q-1}$ tale che $F|_U$ è un embedding localmente proprio su un aperto di un sottoinsieme analitico chiuso di $\mathbb{CP}_n \setminus \mathbb{CP}_{n-q-1}$. Più precisamente:

TEOREMA 4.3 *(Barlet–Silva [9]) Sia $\pi : X \to \mathbb{CP}_q$, con $\pi = (s_0, \dots, s_q)$, una varietà di q-Stein di dim. n tale che le sezioni di $\mathcal{L} = \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}_q}(1))$ diano coordinate locali. Siano $K \subset X$ un sottoinsieme compatto con $K = \widehat{K}$ ed $\Omega \subset X$ un aperto tale che $K \subset \Omega$.*

Esistono un intorno aperto U di K con $U \subset\subset \Omega$, un intero $\nu = \nu(K)$, sezioni $\tau_1, \dots, \tau_{2n+1}$ di $\mathcal{L}^\nu$, un dominio fibrato in polidischi $\mathcal{P} \subset \mathbb{CP}_{2n+q+1} \setminus \mathbb{CP}_{2n}$ ed un embedding chiuso:

$$\tau = (s_0^\nu, \dots, s_q^\nu, \tau_1, \dots, \tau_{2n+1}) : U \to \mathcal{P}.$$

Il problema dell'immersione degli spazi di q-Stein è risolto quindi parzialmente, la difficoltà essendo l'impossibilità di controllare la crescita di ν al variare di K. In particolare la condizione necessaria che uno spazio di q-Stein porti una metrica kähleriana è verificata solo all'intorno di ogni compatto di X. Questa ultima difficoltà è stata completamente superata da Vajaitu:

TEOREMA 4.4 *(Vajaitu [37]) Uno spazio di q-Stein è kähleriano.*

Il lavoro di Barlet-Silva induce ragionevolmente a congetturare che gli spazi q-completi immergibili in $\mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1}$ sono gli spazi di q-Stein.

Lo studio degli spazi olomorficamente q-convessi è stato ripreso da V. Koziarz nella sua Tesi [23]. Egli dimostra un fatto sorprendente riguardo alla natura dei sottoinsiemi aperti di $\mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1}$

†La dimostrazione originale di Barlet-Silva è assai complicata e difficile. Essa è stata recentemente semplificata da Vajaitu, in [37].

che sono olomorficamente q-convessi: un aperto di $\mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1}$ è olomorficamente q-convesso se intersecato con le fibre di $\pi : \mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1} \to \mathbb{CP}_q$ è convesso (geometricamente) come aperto di $\mathbb{CP}_{N-q} \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1} = \mathbb{C}^{N-q} = \mathbb{R}^{2(N-q)}$ per la struttura affine indotta. Il fatto sorprendente è che tale condizione è anche necessaria per gli aperti U per i quali $H^0(U, \mathcal{O}(1)) = H^0(\mathbb{CP}_N, \mathcal{O}(1))$. Ci si attenderebbe piuttosto di ottenere convessità olomorfa relativa alle fibre. Vi è forse un limite dovuto all'impiego di metriche convesse (hermitiane) sullo spazio proiettivo, ma forse vi è anche una difficoltà più profonda inerente alla definizione di spazio olomorficamente q-convesso. Koziarz affronta poi il problema dell'immersione degli spazi q-Stein.

Siano X uno spazio analitico complesso ridotto, $\mathbb{L} \to X$ un fibrato lineare olomorfo che induce $\pi : X \to \mathbb{CP}_q$. Si supponga che $\dim H^0(X, \mathcal{L}) < +\infty$. Se $\pi = (s_0, \dots, s_q)$, completiamo $s_0 \dots, s_q$ ad una base ortonormale $\{s_0, \dots, s_N\}$. Abbiamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{CP}_q \arrow[d, equal] \\ \mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1} \arrow[r, "\pi'"] & \mathbb{CP}_q \end{tikzcd}$$

ove $f = (s_0, \dots, s_q, s_{q+1}, \dots, s_N)$. La questione consiste nel domandarsi quando f è un embedding chiuso. Ora f non è propria; bisognerà quindi considerare embeddings in aperti q-Stein di $\mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1}$. Per fare ciò Koziarz deve rafforzare la nozione di spazio di q-Stein. Si ha:

Teorema 4.5 *Sia $\pi : X \to \mathbb{CP}_q$ uno spazio di q-Stein tale che le sezioni di $\mathcal{L} = \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}_q}(1))$ diano coordinate locali. Si supponga che $\dim H^0(X, \mathcal{L}) = N + 1$ e che esistano $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ e $c : X \to (1, \alpha]$ propria e continua tale l'insieme*

$$\hat{\hat{K}} = \left\{ y \in X : \forall\, \sigma \in \Gamma(X, \mathcal{L}) \ \textit{si ha}\ ||\sigma(y)||_s \le c(x) \sup_{x \in K} ||\sigma(x)||_s \right\}$$

è un sottoinsieme compatto di X per ogni K compatto in X.

Ne segue che f è un embedding chiuso in un aperto di q-Stein di $\mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1}$.

In effetti Koziarz dà anche una caratterizzazione necessaria e sufficiente per l'esistenza di tali embeddings chiusi rimpiazzando la condizione di q-olomorfa convessità calcolando in questo caso gli inviluppi in termini di successioni discrete:

TEOREMA 4.6 *Sia $\pi : X \to \mathbb{CP}_q$ uno spazio di q-Stein tale che le sezioni di $\mathcal{L} = \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}_q}(1))$ diano coordinate locali. Si supponga che* $\dim H^0(X, \mathcal{L}) = N + 1$.

f è un embedding chiuso in un aperto $U \subset \mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1}$ che contiene l'inviluppo convesso fibra a fibra di $f(X)$ se e solo se è verificata la seguente condizione:

per ogni successione discreta $\{x_n\}$ di punti di X e per ogni $K \subset X$ compatto, $\exists \sigma \in H^0(X, \mathcal{L})$ tale che

$$\limsup_{n \to +\infty} ||\sigma(x_n)||_s > \sup_{x \in K} ||\sigma(x)||_s.$$

Koziarz stabilisce una gerarchia delle varie nozioni di q-convessità olomorfa utilizzate per il problema dell'immersione. Il suo lavoro porta in modo naturale a modificare la congettura di Barlet-Silva al seguente problema:

PROBLEMA Determinare la "buona" nozione di q-Steinicità di uno spazio complesso affinché gli spazi q-completi immergibili in $\mathbb{CP}_N \setminus \mathbb{CP}_{N-q-1}$ siano gli spazi di q-Stein.

Riferimenti bibliografici

[1] L. ALESSANDRINI and G. BASSANELLI, *On the embedding of* 1*-convex manifolds with* 1*-dimensional exceptional set,* preprint, Univ. di Parma (2000).

[2] A. ANDREOTTI, *Théorèmes de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudo-concaves,* Bull. Soc. Math. France **91** (1963) 1–38.

[3] A. ANDREOTTI et H. GRAUERT, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France, (1962) **90** 193–259.

[4] A. ANDREOTTI et F. NORGUET, *La convexité holomorphe dans l'espace des cycles d'une variété algebrique*, Ann. Sc. Norm Sup. Pisa, **21** (1967) 31–82.

[5] A. ANDREOTTI and Y.T. SIU, *Projective embedding of pseudoconvex spaces*, Ann. Sc. Norm Sup. Pisa, **24** (1970) 231–278

[6] A. ANDREOTTI and G. TOMASSINI, *Some remarks on pseudoconcave manifolds*, in: Essays in Topology and related topics. Mémoires dediées a G. De Rham, 85–104, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).

[7] A. ANDREOTTI e E. VESENTINI, *Sopra un teorema di Kodaira*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **15** (1961) 283–309.

[8] C. BANICA, *Sur les fibres infinitesimales d'un morphisme propre d'espaces complexes*, in: Sém. F. Norguet, Springer Lecture Notes **807** (1980).

[9] D. BARLET et A. SILVA, *Convexité holomorphe intermédiaire*, Math. Ann., **296** (1993) 649–665.

[10] E. BISHOP, *Mappings of partially analytic spaces*, Am. J. Math., **83** (1961) 209–242.

[11] W.L. CHOW, *Mappings of partially analytic spaces*, Am. J. Math., **83** (1961) 209–242.

[12] M. COLTOIU, *n-concavity of n-dimensional complex spaces*, Math. Z. **210** (1992) 203–206.

[13] M. COLTOIU, *On the embedding of* 1*-convex manifolds with* 1*-dimensional exceptional set*, Comment. Math. Helv. **60** (1985) 458–465.

[14] Y. ELIASHBERG AND M. GROMOV, *Embeddings of Stein manifolds of dimension n into the affine space of dimension* $[3n/2+1]$, Ann. Math., **136** (1992) 122–135.

[15] O. FORSTER, *Plongements des variétés de Stein*, Comm. Math. Helv., **45** (1970) 170–184.

[16] O. FORSTER, *Some remarks on parallelizable Stein manifolds*, Proceedings AMS (1967) 712–716.

[17] H. GRAUERT, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math., **68** (1958) 460–472.

[18] H. GRAUERT, *Uber Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*, Math. Ann., **146** (1962) 331–368.

[19] H. GRAUERT, *Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen*, Math. Ann. **135** (1958) 263–273.

[20] R.C. GUNNING and R. NARASIMHAN, *Immersion of open Riemann surfaces*, Math. Ann. **174** (1967) 103–108.

[21] H. HIRONAKA, *On the Theory of birational blow-ups*, Thesis, Harvard (1960).

[22] K. KODAIRA, *On Kähler varieties of restricted type*, Ann. Math., (1954) **60** 28–48.

[23] V. KOZIARZ, *Plongements des espaces q-Stein,* Thèse de Doctorat. Univ. Nancy-1 (1998) 7–100.

[24] B.G. MOISEZON, *On n-dimensional compact varieties with n-algebraically independent meromorphic functions*, Am. Math. Soc. Translations **63** (1967) 51–177.

[25] D. MUMFORD, *Abelian Varieties*, Oxford University Press (1970) London.

[26] R. NARASIMHAN, *Imbedding of open Riemann surfaces*, Göttingen Nachrichten, **7** (1960) 159–165.

[27] R. NARASIMHAN, *Imbedding of holomorphically complete complex spaces*, Am. J. Math., **82** (1960) 917–934.

[28] J. NASH, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math., **63** (1956) 20–63.

[29] T. OHSAWA, *Completeness of noncompact analytic spaces*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **20** (1984) 683–692.

[30] R. Remmert, *Sur les espaces analytiques holomorphiquement separables et holomorphiquement convexes*, C.R.A.S. Paris, **243** (1956) 118–121.

[31] R. Remmert, *Habilitationsschrift*, Münster (1956).

[32] U. Schaft, *Embettung Steinsher Mannifaltigkeiten*, Manuscr. Math. **47** (1984) 175–186.

[33] C.L. Siegel, *Meromorphe Funktionen auf analytischen mannifaltigkeiten*, Ak. Wiss Göttingen (1955) 71–77.

[34] A. Silva, *Embedding strongly (1,1)-convex-concave spaces in* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_m$, in: Several Complex Variables, Williamstown Coll. 1975, Proceedings of the A.M.S. Symposia in Pure Math., vol. 30, American Math. Society, Providence R.I. (1977) 41–44.

[35] A. Silva, *Some properties of positive line bundles on 1-convex complex analytic spaces*, Rend. Sem. Mat. Padova, **63** (1980) 61–68.

[36] G. Tomassini, *An embedding theorem for strongly q-pseudoconcave manifolds*, Quart. J. Math. Oxford, **29** (1978) 363–366.

[37] V. Vajaitu, *Kählerianity of q-Stein spaces*, Arch. Math **66** (1996) 250–257.

[38] H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math., **37** (1936) 645–680.