ITALO CAPUZZO DOLCETTA

Dipartimento di Matematica
Università di Roma "La Sapienza"
capuzzo@mat.uniroma1.it

TEOREMI DI LIOUVILLE E STIME A PRIORI PER EQUAZIONI ELLITTICHE SEMILINEARI

Conferenza tenuta il giorno 30 Marzo 1998

1 Introduzione

Questo articolo è una breve rassegna di alcuni risultati alla Liouville per equazioni ellittiche semilineari e delle loro applicazioni a stime a priori L^∞ per soluzioni non negative di problemi al contorno. Si tratta di una problematica che è stata oggetto di ampio interesse a cavallo tra gli anni '70 e '80 (si vedano, per esempio, i lavori di Brezis-Turner [12], Gidas-Spruck [20, 21], de Figuereido-Lions-Nussbaum [18]), in connessione con lo studio tramite metodi di punto fisso o della teoria del grado topologico di Leray-Schauder dell'esistenza di soluzioni per problemi ellittici superlineari con termine di sorgente positivo, del tipo

$$u > 0, \qquad Lu + a(x)g(u) = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{1.1}$$

$$u = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega. \tag{1.2}$$

Qui Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $a > 0$ è una funzione data su Ω, $g > 0$ è una funzione nonlineare e

$$Lu = \mathrm{tr}(A(x)\nabla^2 u) \tag{1.3}$$

è un operatore uniformemente ellittico.

Negli ultimi anni questi argomenti hanno suscitato una rinnovata attenzione in relazione con questioni di esistenza di soluzioni positive di (1.1), (1.2) aventi *carattere indefinito* e cioè quelli in cui la funzione a può annullarsi e cambiare segno in Ω [4, 3, 24].

Una ulteriore direzione di sviluppo ha riguardato [6, 7, 13, 17] il caso in cui, oltre al carattere indefinito, anche la parte principale dell'equazione (1.1) presenta una forma di *degenerazione*, modellata da un sublaplaciano su un gruppo di Lie stratificato, i.e. un operatore L della struttura (1.3) ma con forma quadratica solamente semidefinita,

$$A(x)\xi \cdot \xi \geq 0 \qquad \forall(\xi, x) \in \mathbb{R}^N \times \Omega$$

e verificante la condizione di generazione di Hormander.

Un esempio tipico di tali operatori è il laplaciano di Kohn-Heisenberg Δ_{H^n}.

2 Teoremi di tipo Liouville

Una formulazione del classico teorema di Liouville per le funzioni armoniche afferma che le sole soluzioni u di

$$u \geq 0\,, \quad \Delta u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{2.1}$$

sono le costanti. È ben noto che questa proprietà resta valida anche per le funzioni superarmoniche di una o due variabili (vedi per esempio [23]); più precisamente si ha che se $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ con $N \leq 2$ verifica

$$u \geq 0, \quad \Delta u \leq 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N, \tag{2.2}$$

allora u è necessariamente una costante. Una dimostrazione nel caso $N = 2$, si basa sul teorema dei tre cerchi di Hadamard che dipende, a sua volta, dallo speciale comportamento della soluzione fondamentale $log|x|$.

D'altra parte, per $N \geq 3$ esistono funzioni superarmoniche non negative non banali, quali ad esempio in R^3

$$u(x) = \begin{cases} (15 - 10|x|^2 + 3|x|^4)/8 & \text{se } |x| < 1 \\ |x|^{-1} & \text{se } |x| \geq 1\,. \end{cases}$$

2.1 Il caso semilineare uniformemente ellittico

Il classico risultato riguardante le funzioni armoniche è stato generalizzato a soluzioni non negative di equazioni ellittiche semilineari in $\mathbb{R}^N$ o in semispazi di $\mathbb{R}^N$ in [20, 21]. Per il caso dell'intero spazio vale il seguente teorema:

Teorema 2.1 *[20] Se $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ verifica*

$$u \geq 0\,, \quad \Delta u + Cu^\alpha = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{2.3}$$

con $1 \leq \alpha < (N+2)/(N-2)$ e C costante strettamente positiva, allora $u \equiv 0$.

Questo teorema (che per $N = 2$ è una ovvia conseguenza del risultato sopracitato per la disequazione (2.2)), è altamente non banale in dimensione superiore e fornisce un risultato ottimale nel senso che per $\alpha = \frac{N+2}{N-2}$ l'equazione (2.3) ha soluzioni non nulle; precisamente tutte le soluzioni sono del tipo

$$u(x) = (N(N-2)\mu^2)^{(N-2)/4}(\mu^2 + |x-a|^2)^{-(N-2)/2}$$

con $\mu > 0$ e $a \in \mathbb{R}^N$ (si veda [16], anche per una dimostrazione differente del Teorema 2.1 basata sul metodo dei moving planes).

Nel caso del semispazio $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^N\ x_N > 0\}$ si ha invece:

Teorema 2.2 *[21] Se $u \in C^2(\Sigma) \cap C(\bar{\Sigma})$ verifica*

$$u \geq 0\,, \quad \Delta u + Cu^\alpha = 0 \qquad \text{in } \Sigma \tag{2.4}$$

$$u = 0 \qquad \text{su } \{x_N = 0\} \tag{2.5}$$

con $1 \leq \alpha < (N+2)/(N-2)$ e C costante strettamente positiva, allora $u \equiv 0$.

Recentemente, H. Berestycki, L. Nirenberg ed il presente autore, motivati dallo studio di problemi ellittici superlineari di tipo indefinito, hanno stabilito un risultato di tipo Liouville nonlineare per disuguaglianze del tipo

$$u \geq 0\,, \quad \Delta u + h(x)u^{\alpha} \leq 0 \qquad \text{in } \Sigma\,, \tag{2.6}$$

dove Σ è un cono connesso di $\mathbb{R}^N$ con vertice nell'origine, $\bar{\Sigma} \neq \mathbb{R}^N$ e $h \geq 0$ è una funzione che si può annullare sulla frontiera di Σ. Il risultato vale sotto alcune condizioni che legano l'esponente α, la rapidità di crescita di h all'infinito, l'apertura del cono e la dimensione N. Più precisamente, denotando con λ_1 l'autovalore principale del problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace-Beltrami su $\Sigma \cap S^{N-1}$, con $\phi_1 > 0$ l'autofunzione corrispondente e con β la soluzione positiva dell'equazione $\lambda_1 = \beta(N + \beta - 2)$ si ha:

Teorema 2.3 *[3] Sia $u \in C^2(\Sigma)$ limitata vicino all'origine e tale che*

$$u \geq 0,\, \Delta u + h(x)u^{\alpha} \leq 0 \qquad \textit{in}\, \Sigma \tag{2.7}$$

Se h verifica:

$$\begin{aligned} &h \in C(\Sigma)\,, \quad h \geq 0 \textit{ e limitata vicino all'origine} \\ &h(x) = a|x|^{\gamma} \textit{ per } |x| \textit{ grande, con } \gamma > -2 \textit{ e } a > 0 \end{aligned}$$

allora $u \equiv 0$ se $1 < \alpha \leq (N + \beta + \gamma)/(N + \beta - 2)$.

Nel caso che la disuguaglianza (2.7) abbia luogo in tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$ si ha invece:

Teorema 2.4 *[13] Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ tale che*

$$u \geq 0,\, \Delta u + h(x)u^{\alpha} \leq 0 \qquad \textit{in}\, \mathbb{R}^N \tag{2.8}$$

Se h verifica:

$$\begin{aligned} &h \in C(\mathbb{R}^N), h \geq 0 \\ &h(x) = a|x|^{\gamma} \textit{ per } |x| \textit{ grande, con } \gamma > -2 \qquad \textit{e } a > 0 \end{aligned}$$

allora $u \equiv 0$ se $1 < \alpha \leq (N + \gamma)/(N - 2)$.

Gli intervalli per l'esponente α dati da questi teoremi sono ottimali. Nel caso del Teorema 2.4 è facile verificare infatti che per $\alpha = \frac{N+\gamma-\varepsilon}{N-2-\varepsilon}$ la funzione $u = (1+|x|^2)^{-(N-2-\varepsilon)}$ soddisfa (2.8). Nel caso di un cono proprio d'altra parte per qualsiasi $\alpha > \frac{N+\beta+\gamma}{N+\beta-2}$ si può costruire una funzione $u > 0$ soluzione di $\Delta u + |x|^\gamma u^\alpha \le 0$ in Σ (si veda [10]). Rimane un problema aperto se, per $\frac{N+\beta+\gamma}{N+\beta-2} < \alpha < \frac{N+\beta+\gamma+2}{N+\beta-2}$, $u \equiv 0$ sia la sola soluzione dell'equazione

$$u \ge 0,\ \Delta u + |x|^\gamma u^\alpha = 0 \qquad \text{in}\, \Sigma\,.$$

Si osservi anche che il numero β sopra definito ha un ruolo determinante per le equazioni ellittiche nei coni, sia per quanto riguarda teoremi di tipo Hopf per punti conici del bordo sia per determinare la crescita delle funzioni superarmoniche in un cono.

In particolare segnaliamo i seguenti due fatti:

(i) $v(x) = |x|^\beta \phi_1(x/|x|)$ è una funzione armonica positiva e omogenea di grado β in Σ, nulla su $\partial\Sigma$

(ii) per ogni funzione u superarmonica positiva in Σ esiste $C > 0$ tale che

$$\overline{u}(|x|) = \int_{\Sigma\cap S^{N-1}} u(x)d\sigma \ge C|x|^{2-N-\beta} \qquad \forall x \in \Sigma \cap \{|x| > 1\}\,.$$

La funzione v definita in (i) è uno strumento fondamentale per dimostrare (ii) ed anche nella dimostrazione del teorema 2.3.

Il risultato del Teorema 2.3 discende infatti dalla stima integrale

$$\left(\int_\Sigma h u^\alpha v \zeta_R^\theta\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \le CR^{(N+\beta-\frac{\gamma}{\alpha-1})\frac{\alpha-1}{\alpha}-2}$$

dove v è la funzione definita in (i), $\theta = \alpha/(\alpha-1)$, $\zeta_R(|x|) = \zeta(|x|/R)$ e ζ è una funzione di cut-off.

Una semplice conseguenza del Teorema 2.3 che sarà richiamata nel paragrafo successivo è:

Teorema 2.5 *Sia* $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$ *e* $u \in C^2(\Sigma)$ *limitata vicino all'origine e tale che*

$$u \ge 0, \quad \Delta u + x_N u^\alpha \le 0 \qquad \mathit{in}\, \Sigma\,.$$

Allora $u \equiv 0$, *se* $1 < \alpha < (N+2)/(N-1)$.

La dimostrazione si basa sul fatto che per $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$ si ha $\beta = 1$; infatti la funzione $v(x) = x_N$ è armonica positiva e omogenea di grado 1 in Σ e può quindi essere usata nella stima integrale.

Segnaliamo infine che risultati di tipo Liouville per soluzioni limitate (non necessariamente ≥ 0) di

$$\Delta u + C|u|^{\alpha-1}u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{2.9}$$

sono stati ottenuti da A. Bahri e P.L. Lions sotto una ipotesi riguardante l'indice di Morse (vedi [2]). Ricordiamo che l'indice di Morse $i(u)$ di una soluzione u di (2.9) è il numero degli autovalori negativi dell'operatore linearizzato

$$-\Delta - C\alpha|u|^{\alpha-1}$$

in $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ e che $i(u) \geq n(u)$, dove $n(u)$ è il numero delle componenti connesse dell'insieme $[u(x) \neq 0]$.

Citiamo, a titolo di esempio, il seguente:

Teorema 2.6 *[2] Se $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ è una soluzione limitata dell'equazione (2.9) con $i(u) < +\infty$, $1 \leq \alpha < (N+2)/(N-2)$ e C costante strettamente positiva, allora $u \equiv 0$.*

Altri interessanti risultati di tipo Liouville per soluzioni limitate e di indice finito di equazioni del tipo

$$\Delta u + x_N^+|u|^{\alpha-1}u - x_N^- g(u) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N$$

sono stati recentemente ottenuti da M. Ramos, S. Terracini, C. Troelstler [24].

2.2 Il caso del laplaciano di Kohn-Heisenberg

In questo paragrafo descriviamo alcuni recenti risultati di tipo Liouville per equazioni e disequazioni relative al laplaciano di Kohn-Heisenberg. Per maggiori dettagli, estensioni al caso più generale di sublaplaciani su gruppi di Lie stratificati ed altri esempi di operatori ellittici degeneri si rinvia ai lavori [6, 7, 13, 17]. Altri recenti lavori rilevanti sull'argomento che non sono qui descritti sono [5, 19, 25, 22, 26, 11].

Il laplaciano di Kohn-Heisenberg Δ_{H^n} è l'operatore ellittico degenere

$$\begin{aligned}\Delta_{H^n} \quad = \quad & \sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 4x_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_{2n+1}^2}\right) + \\ & + 4\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i+n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_{2n+1}} - x_i\frac{\partial^2}{\partial x_{i+n}\partial x_{2n+1}}\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

che agisce su funzioni $u = u(x)$ con $x = (x_1, \cdots, x_{2n}, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

È facile verificare che Δ_{H^n} è della forma (1.3) con $A(x)$ data da

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 & 2\eta \\ 0 & I_n & -2\xi \\ 2\eta & -2\xi & 4(|\xi|^2 + |\eta|^2) \end{pmatrix}$$

dove $\xi = (x_1, ..., x_n)$, $\eta = (x_{n+1}, ..., x_{2n})$.

L'idea di base adottata nei lavori [6, 7, 13] per ottenere risultati alla Liouville in questo caso è quella di guardare l'operatore di Kohn-Heisenberg come un *sublaplaciano* sullo spazio $\mathbb{R}^{2n+1}$ dotato della struttura di gruppo di Heisenberg: $x \circ y = (x_1 + y_1, \dots, x_{2n} + y_{2n}, x_{2n+1} + y_{2n+1} + 2\sum_{i=1}^{n}(x_{i+n}y_i - x_i y_{i+n}))$.

Con ciò si intende che $\Delta_{H^n} = \sum_{i=1}^{2n} X_i^2$, con

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2x_{i+n}\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}, \qquad X_{i+n} = \frac{\partial}{\partial x_{i+n}} - 2x_i\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}} \tag{2.11}$$

per $i = 1, \dots, n$. Questa osservazione consente di utilizzare convenientemente le proprietà di scala dei campi X_i e dell'operatore Δ_{H^n} rispetto alle *dilatazioni anisotrope*

$$\delta_\lambda(x) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{2n}, \lambda^2 x_{2n+1}) \qquad (\lambda > 0\ ) \tag{2.12}$$

e l'azione di Δ_{H^n} sulle funzioni f che sono radiali rispetto alla *norma omogenea*

$$\rho(x) = ((\sum_{i=1}^{2n} x_i^2)^2 + x_{2n+1}^2)^{\frac{1}{4}}\ . \tag{2.13}$$

Per tali funzioni si ha:

$$\Delta_{H^n} f(\rho) = |\nabla^* \rho|^2 \left(f''(\rho) + f'(\rho) \frac{Q-1}{\rho} \right)$$

dove $\nabla^* f(\rho) = (X_1 f(\rho), \dots, X_{2n} f(\rho))$. Il numero $Q = 2n + 2$ è la *dimensione omogenea* del gruppo di Lie $G = (\mathbb{R}^{2n+1}, \circ)$.

Seguendo le linee della dimostrazione dei Teoremi 2.3 e 2.4 si ottiene

TEOREMA 2.7 *[6] Sia u una soluzione di*

$$u \geq 0\,, \quad \Delta_{H^n} u(x) + h(x) u^\alpha \leq 0 \qquad \textit{in } \mathbb{R}^{2n+1} \tag{2.14}$$

dove h è una funzione continua nonnegativa tale che

$$h(x) \geq K \rho^\gamma(x)$$

per $\rho(x)$ sufficientemente grande e per qualche $K > 0$, $\gamma > -2$. Allora $u \equiv 0$, se $1 < \alpha \leq (Q+\gamma)/(Q-2)$.

È interessante notare che lo stesso risultato vale quando Δ_{H^n} è rimpiazzato da un sublaplaciano su un gruppo di Lie stratificato (vedi [13]), pur di scegliere in modo appropriato la dilatazione e la norma omogenea. Anche in questo caso generale la restrizione su α dipende dalla dimensione omogenea del gruppo di Lie associato al sublaplaciano. È da notare anche che la limitazione superiore per α nel Teorema è ottimale. Infatti si può verificare che, se $\alpha \geq \frac{Q+\gamma-\epsilon}{Q-2-\epsilon}$, allora la funzione $u(\rho) = C_\epsilon (1+\rho^2)^{-\delta/2}$ con $\delta = Q - 2 - \epsilon$ verifica, per un opportuna scelta di C_ϵ,

$$u \geq 0\,, \quad \Delta_{H^n} u(x) + \rho^\gamma |\nabla^* \rho|^2 u^\alpha \leq 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^{2n+1}\,.$$

Risultati analoghi al Teorema 2.3 nel caso di semispazi e anche per alcuni tipi di coni (in particolare, quelli per cui si può costruire una funzione "simile" alla funzione v definita in (i)) valgono anche nella presente situazione. Come è naturale attendersi, data l'anisotropia dell'operatore Δ_{H^n}, i teoremi di Liouville saranno diversi a seconda che si consideri il semispazio $[x_{2n+1} > 0]$ ovvero semispazi del tipo $[x_i > 0]$ con $i = 1, \cdots, 2n$.

Citiamo, a titolo di esempio,

TEOREMA 2.8 *[7] Sia* u *una soluzione di*

$$u \geq 0\,, \quad \Delta_{H^n} u(x) + h(x) u^\alpha \leq 0 \qquad \text{in } [x_{2n+1} > 0] \tag{2.15}$$

dove h *è come nel Teorema 2.7. Allora* $u \equiv 0$*, se* $1 < \alpha \leq (Q+2+\gamma)/Q$*.*

TEOREMA 2.9 *[7] Sia* u *una soluzione di*

$$u \geq 0\,, \quad \Delta_{H^n} u(x) + x_1 h(x) u^\alpha \leq 0 \qquad \text{in } [x_1 > 0] \tag{2.16}$$

dove h *è come nel Teorema 2.7 con* $\gamma > -1$*. Allora* $u \equiv 0$*, se* $1 < \alpha \leq (Q+\gamma-1)/(Q-2)$*.*

2.3 Il caso dell'operatore di Grushin

Un operatore ellittico del secondo ordine con forma quadratica semidefinita che non rientra nella tipologia dei sublaplaciani su gruppi di Lie stratificati (perchè non è invariante a sinistra rispetto ad alcuna azione di gruppo su $\mathbb{R}^N$) è l'operatore di Grushin definito su $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ da

$$L = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} + |x|^{2k} \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\,, \tag{2.17}$$

dove $k \in N$ e $(x, y) = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ denota il generico punto di $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Non è difficile verificare che L soddisfa la condizione di Hormander di ordine k e che L è 2 omogeneo rispetto alla dilatazione

$$\delta_\lambda \xi = (\lambda x, \lambda^{k+1} y)\,. \tag{2.18}$$

Inoltre, la norma

$$\rho(\xi) = |x| + |y|^{\frac{1}{k+1}}\,, \tag{2.19}$$

dove $\xi = (x, y)$ e $|\cdot|$ denota la norma euclidea su $\mathbb{R}^N$, è $1-$ omogenea rispetto alla dilatazione in (2.18). Da ciò segue in particolare che la misura N-dimensionale della sfera $\Omega_R = B_p(0, R) \times B_q(0, R^{k+1})$ associata a (2.19) è proporzionale a R^Q con $Q = p + (k+1)q = N + kq$.

Basandosi su queste osservazioni si può dimostrare, con una tecnica simile a quella dei Teoremi 2.3 e 2.4 il seguente:

TEOREMA 2.10 *[13] Sia* u *una soluzione di*

$$u \geq 0\,, \quad \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} + |x|^{2k} \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + u^{\alpha} \leq 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N\,. \tag{2.20}$$

Allora $u \equiv 0$ *, se* $k > 1$ *e* $1 < \alpha \leq Q/(Q-2)$*.*

2.4 Il caso completamente nonlineare

In questo paragrafo presentiamo due risultati di tipo Liouville per soluzioni di viscosità non negative di problemi uniformemente ellittici completamente non lineari. Più precisamente, si considerano operatori non lineari $F(x, D^2u)$ con $F \in C(\mathbb{R}^N \times S^N; \mathbb{R})$ (qui S^N denota l'insieme delle matrici simmetriche di ordine N) e per i quali esistano costanti $0 < \lambda \leq \Lambda$ tali che

$$\lambda tr(P) \leq F(x, M+P) - F(x, M) \leq \Lambda tr(P)\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $M, P \in S^N$ con P semidefinita positiva.

Utilizzando tecniche tipiche delle soluzioni viscosità e la disuguaglianza di Harnack debole

$$\|v\|_{L^p(B_R)} \leq C_p R^{\frac{N}{p}} \inf_{B_{2R}} v$$

dimostrata in [8] per soluzioni viscosità non negative di $F(x, D^2v) \leq 0$ si possono dimostrare i seguenti

TEOREMA 2.11 *[8] Sia* $u \in C(\mathbb{R}^N)$ *una soluzione di viscosità di*

$$u \geq 0\,, \quad F(x, D^2u) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{2.21}$$

con $F(x, 0) \equiv 0$*. Allora* u *è una costante.*

TEOREMA 2.12 *[9] Sia* $u \in C(\mathbb{R}^N)$ *una soluzione di viscosità di*

$$u \geq 0\,, \quad F(x, D^2u) + u^{\alpha} \leq 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{2.22}$$

con $F(x, 0) \equiv 0$*. Allora esiste* $p_0 > 0$ *tale che, se* $0 < \alpha < 2p_0/N + 1$*,* $u \equiv 0$*.*

L'esponente p_0 è l'estremo superiore dei valori $p > 0$ per i quali le soluzioni viscosità non negative di $F(x, D^2v) \leq 0$ soddisfano la disuguaglianza di Harnack debole e, in generale, dipende da N e da λ/Λ. Nel caso in cui $F(x, M) = F(M)$ è lineare o più in generale convesso, p_0 coincide con $N/(N-2)$, indipendentemente dalle costanti di ellitticità di F.

È interessante notare che per $F(D^2u) = \Delta u$ il Teorema 2.12 riproduce (con una dimostrazione differente) il risultato del Teorema 2.4 e lo estende al caso $\alpha < 1$.

3 Esistenza di soluzioni per problemi ellittici indefiniti

In questo paragrafo diamo una indicazione di come alcuni risultati alla Liouville descritti precedentemente possono essere applicati, in congiunzione con una analisi di blow-up, per ottenere stime a priori per problemi al contorno del tipo (1.1), (1.2) con carattere di indefinitezza. Per semplicità considereremo soltanto i casi $L = \Delta$ e $L = \Delta_{H^n}$.

3.1 Il caso uniformemente ellittico

Consideriamo l'esempio modello

$$u > 0\,, \quad \Delta u + a(x)g(u) = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{3.1}$$

$$u = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \tag{3.2}$$

con le seguenti ipotesi sui dati $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $a \in C^2(\Omega)$:

$$g(0) = g'(0) = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{g(s)}{s^\alpha} \to \gamma \quad \text{as } s \to +\infty, \text{for some } \alpha > 1 \text{ and } \gamma > 0 \tag{3.4}$$

$$\Omega_+ := \{x \in \Omega : a(x) > 0\} \neq \emptyset \tag{3.5}$$

$$\Omega_- := \{x \in \Omega : a(x) < 0\} \neq \emptyset \tag{3.6}$$

$$\Gamma := \overline{\Omega}_+ \cap \overline{\Omega}_- \subset \Omega\,, \nabla a(x) \neq 0 \quad \text{su } \Gamma. \tag{3.7}$$

Sotto queste ipotesi si ha:

Teorema 3.1 *[3] Se $1 < \alpha < (N+2)/(N-2)$ allora il problema di Dirichlet (3.1), (3.2) ha almeno una soluzione.*

Questo teorema è stato dimostrato in [3] sotto l'ulteriore restrizione $1 < \alpha < (N+2)/(N-1)$; le stime a priori necessarie per ottenere il risultato di esistenza per valori di α fino all'esponente critico di Sobolev $(N+2)/(N-2)$ sono state ottenute in [14] con un metodo che differisce parzialmente da quello che descriveremo brevemente in seguito. Prima di dare qualche indicazione sulla dimostrazione del Teorema 3.1 segnaliamo che un risultato del tutto simile vale per operatori generali del tipo

$$Lu = \mathrm{tr}(A(x)\nabla^2 u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)$$

soddisfacenti, per $C > 0$, la condizione di uniforme ellitticità

$$A(x)\xi \cdot \xi \geq C|\xi|^2 \qquad \forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^N \times \Omega$$

e condizioni di Dirichlet o di derivata obliqua ovvero di Robin, sotto la condizione che l'autovalore principale di $-L$ con le corrispondenti condizioni al bordo sia strettamente positivo. Si veda in proposito [3] dove è considerato peraltro anche il caso in cui l'autovalore principale sia 0.

Differenti geometrie per l'insieme Γ (per esempio, $\Gamma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ o quando la varietà Γ ha auto-intersezioni) possono essere trattate con metodi simili (vedi [24] per alcuni risultati recenti in questa direzione). Il caso in cui a si annulla su un insieme "spesso" è stato invece trattato con metodi della teoria dei punti critici per esempio in [1].

Il prossimo risultato, che è in effetti il cuore della dimostrazione del Teorema 3.1, fornisce le stime a priori nella norma uniforme che consentono di ottenere soluzioni classiche del problema (3.1), (3.2) con il metodo del grado di Leray-Schauder. La sua dimostrazione è basata sulla tecnica di riscalamento e blow-up e, in maniera cruciale, su alcuni dei risultati di tipo Liouville presentati nella Sezione 2.

TEOREMA 3.2 *[3] Sia $(u, \rho) \in W^{2,q} \times [0, +\infty)$ (per ogni $q < +\infty$) tale che*

$$u > 0\,, \quad \Delta u + a(x)g(u) + \rho = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{3.8}$$

$$u = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega\,. \tag{3.9}$$

Allora esiste una costante C dipendente da a e da Ω ma non da (u, ρ) tale che

$$u(x) \leq C \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.10}$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione del teorema procede per assurdo. Si suppone dunque l'esistenza di una successione (u_j, ρ_j) di soluzioni di (3.8),(3.9) tali che, per $j \to +\infty$,

$$M_j = \max_{\overline{\Omega}} u_j = u_j(x_j) \to +\infty \tag{3.11}$$

Un argomento basato sul principio di massimo mostra che ρ_j è una successione limitata. Poniamo ora

$$y = \frac{x - x_j}{\lambda_j}$$

dove λ_j è un fattore di scala positivo che sarà specificato più avanti e consideriamo le funzioni di blow-up

$$v_j(y) = \frac{u_j(\lambda_j y + x_j)}{M_j}.$$

Si verifica facilmente che le funzioni v_j soddisfano, in un opportuno dominio Ω_j della variabile y, le equazioni

$$v_j > 0,\ \Delta v_j + \lambda_j^2 M_j^{\alpha-1}(a(\lambda_j y + x_j) g(M_j v_j) M_j^{-\alpha} + \rho_j M_j^{-\alpha}) = 0 \tag{3.12}$$

e la condizione

$$v_j(0) \equiv 1\,. \tag{3.13}$$

Denotando con x_0 il limite (a meno di sottosuccessioni) della successione x_j per $j \to +\infty$, si è condotti a considerare tre casi secondo la posizione di x_0 in $\overline{\Omega}$:

1. $x_0 \in \Gamma$, i.e. $a(x_0) = 0$
2. $x_0 \in \Omega_+ \cup \Omega_-$
3. $x_0 \in \partial\Omega$

Una analisi di blow-up specifica deve essere effettuata in ognuno dei casi (vedi [3] per i dettagli). Consideriamo dapprima il caso 1, tipico dei problemi di tipo indefinito, e sostituiamo il termine $a(\lambda_j y + x_j)$ nell'equazione (3.12) con il suo sviluppo di Taylor del primo ordine. Con qualche calcolo si ottiene

$$\Delta v_j + \lambda_j^3 M_j^{\alpha-1} g(M_j v_j) M_j^{-\alpha} h_j + \lambda_j^2 \rho_j^2 M_j^{-1} = 0\,, \tag{3.14}$$

dove

$$h_j = \nabla a(z_j) \cdot y \pm \delta_j \lambda_j^{-1} |\nabla a(z_j)| + 0(\lambda_j^2 |y|^2 + \delta_j^2 \lambda_j^{-1})\,.$$

In questa formula z_j è la proiezione di x_j su Γ e si prende il segno $+$ ovvero $-$ a seconda che x_j sia in Ω^+ oppure in Ω^-. Si sceglie poi il fattore di scala

$$\lambda_j = M_j^{(1-\alpha)/3}$$

e si passa al limite in (3.14) per $j \to +\infty$.

Se $\delta_j/\lambda_j \to 0$ la funzione limite v soddisfa

$$0 \le v \le 1\,, \qquad v(0) = 1\,, \qquad \Delta v + (\nabla a(x_0) \cdot y) v^\alpha = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{3.15}$$

Ora si osserva che, per ipotesi, $\nabla a(x_0) \neq 0$; pertanto con un opportuno cambio di variabile l'equazione (3.15) si riduce a

$$v \ge 0\,, \qquad \Delta v + \xi_N v^\alpha \le 0 \qquad \text{in } \{\xi \in \mathbb{R}^N : \xi_N > 0\}\,.$$

A questo punto si applica il Teorema 2.5 che, in combinazione con il fatto che $v(0) = 1$ fornisce la contraddizione desiderata.

Gli altri sottocasi possibili (e cioè $\delta_j/\lambda_j \to +\infty$ oppure $\delta_j/\lambda_j \to \delta_0 > 0$) conducono alla stessa contraddizione con il teorema sopracitato oppure con i Teoremi 2.1, 2.2.

Nel caso 2, scegliendo invece $\lambda_j = M_j^{(1-\alpha)/2}$, si ottiene la seguente equazione limite

$$v \ge 0\,, \qquad \Delta v + v^\alpha = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N\,.$$

Nel caso 3, con la stessa scelta del parametro di scala effettuata nel caso 2, si ottiene invece l'equazione limite

$$v \ge 0\,, \qquad \Delta v + v^\alpha = 0 \qquad \text{in } \{y \in \mathbb{R}^N : y_N > 0\}\,.$$

Anche in questi casi si ha ovviamente $v(0) = 1$ e la contraddizione segue dai Teoremi 2.1, 2.2. □

3.2 Il caso del laplaciano di Kohn-Heisenberg

Consideriamo adesso il problema

$$u > 0\,, \quad \Delta_{H^n} u + a(x)g(u) = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{3.16}$$

$$u = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega\,, \tag{3.17}$$

dove Ω è un aperto limitato dello spazio $\mathbb{R}^{2n+1}$.

L'idea di base nel lavoro [7] è quella, descritta nel paragrafo precedente, di considerare il laplaciano di Kohn-Heisenberg come un *sublaplaciano* sullo spazio $\mathbb{R}^{2n+1}$ munito della struttura di gruppo di Heisenberg. Ai fini dell'argomento di blow-up nel caso in questione le proprietà principali sono la 1-omogeneità della norma (2.13) $x \to \rho(x)$ e dei campi X_i rispetto alla dilatazione anisotropa (2.12) e la 2-omogeneità di Δ_{H^n} rispetto a δ_λ.

Pertanto, l'operatore di Kohn-Heisenberg si comporta per molti aspetti come il laplaciano se $\mathbb{R}^{2n+1}$ è dotato dell'appropriata struttura algebrica e metrica.

Ciò consente di dimostrare risultati simili a quelli dei Teoremi 3.1 e 3.2 riguardanti le stime a priori e quindi l'esistenza di soluzioni per il problema (3.16), (3.17). La dimostrazione è basata anche in questo caso su argomenti di blow-up in combinazione con specifici teoremi di Liouville nonlineari del tipo di quelli citati nella Sezione 2 (vedi anche [5, 6, 7, 13]). Alcune ipotesi supplementari sono tuttavia richieste per implementare questo approccio nel caso in questione in cui l'operatore è degenere. Può accadere infatti che il punto limite x_0 nell'argomento di blow-up sia un punto *caratteristico* di Δ_{H^n} per l'insieme di livello di qualche funzione φ; con ciò si intende che

$$\nabla^* \varphi(x_0) = 0\,.$$

I punti caratteristici del bordo sono l'equivalente per Δ_{H^n} dei punti conici per Δ.

Condizioni di *pseudoconvessità* su $\partial\Omega$ e sull'insieme degli zeri di a consentono di superare questo tipo di difficoltà. Supponendo che

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} : \varphi(x) > 0 \ , \varphi \in C^2\}, \\ \partial\Omega &= \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} : \varphi(x) = 0\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\nabla^2\varphi(x)A(x) \quad \text{semidefinita positiva in ogni punto caratteristico } x \in \partial\Omega \tag{3.19}$$

$$\nabla^2 a(x)A(x) \quad \text{semidefinita positiva in ogni punto caratteristico } x \in \Gamma \tag{3.20}$$

si ottiene il seguente

Teorema 3.3 *[7] Si suppone che* Ω, $g \in C^1(\mathbb{R})$ *e* $a \in C^2(\Omega)$ *soddisfino (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.18), (3.19), (3.20) . Se* $1 < \alpha < \frac{(2n+1)}{2n}$ *, allora il problema di Dirichlet (3.16), (3.17) ha almeno una soluzione nello spazio di Holder-Stein* $\Gamma^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Riferimenti bibliografici

[1] S. Alama, G. Tarantello, *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*, Calc. Var. PDE **1** (1993) 439–475.

[2] A. Bahri, P.L. Lions, *Solutions of superlinear elliptic equations and their Morse indexes*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992) 1205–1215.

[3] H. Berestycki, I. Capuzzo Dolcetta, L. Nirenberg, *Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems*, Topological Methods in Nonlinear Analysis **4** (1995) 59–78.

[4] H. Berestycki, I. Capuzzo Dolcetta, L. Nirenberg, *Problèmes elliptiques indéfinis et théorèmes de Liouville non-linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **317** (1993) 945–950.

[5] I. BIRINDELLI, *Nonlinear Liouville Theorems*, in Reaction Diffusion Systems, G. Caristi and E. Mitidieri eds., Lecture Notes in Pure and Applied MAthematics, **194**, Dekker, New York 1998.

[6] I. BIRINDELLI, I. CAPUZZO DOLCETTA, A. CUTRÌ, *Liouville theorems for semilinear equations on the Heisenberg group*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire, **14,3** (1997) 295–308.

[7] I. BIRINDELLI, I. CAPUZZO DOLCETTA, A. CUTRÌ, *Indefinite semilinear equations on the Heisenberg group: a priori bounds and existence*, Comm. Partial Diff. Eq. **23** (1998) n. 7–8.

[8] X. CABRE', L. CAFFARELLI, *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Amer. Math. Soc. (1995).

[9] A. CUTRÌ, F. LEONI, *On the Liouville property for fully nonlinear equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlineaire **17** (1998) n. 6.

[10] I. BIRINDELLI, E. MITIDIERI, *Liouville theorems for elliptic inequalities and applications*, in Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Sect. A, **128** (1998) n. 6.

[11] D. BLANCHARD, D. FOURDRINIER, *Non trivial solutions of nonlinear partial differential inequations and cut-off*, Rendiconti di Matematica (7) **19** (1999) n. 1.

[12] H. BREZIS, R.E. TURNER, *On a class of superlinear elliptic problems*, Comm. Partial Diff. Eq. **2** (1977) 601–614

[13] I. CAPUZZO DOLCETTA, A. CUTRÌ, *On the Liouville property for sublaplacians*, Ann. Sc. Norm. Pisa (4) **25** (1997) n. 1–2.

[14] W. CHEN, C. LI, *Indefinite elliptic problems in a domain*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **3,3** (1997) 333–340.

[15] W. CHEN, C. LI, *A priori estimates for solutions to nonlinear elliptic equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **122** (1993) 145–157.

[16] W. CHEN, C. LI, *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math. Journ., 615–622 (1991).

[17] A. Cutrì, *Problemi semilineari ed integro-differenziali per sub-laplaciani*, Ph.D Thesis, Università di Roma Tor Vergata (1997).

[18] D.G. de Figuereido, P.-L. Lions and R.D. Nussbaum, *A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, J. Math. Pures et Appl. **61** (1982) 41–63.

[19] N. Garofalo, E. Lanconelli, *Existence and non existence results for semilinear equations on the Heisenberg group*, Indiana Univ. Math. Journ. **41** (1992) 71–97.

[20] B. Gidas, J. Spruck, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Partial Diff. Eq. **8** (1981) 883–901.

[21] B. Gidas, J. Spruck, *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1981) 525–598.

[22] E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Asymptotic behaviour and non existence theorems for semilinear Dirichlet problems involving critical exponent on unbounded domains of the Heisenberg group*, Boll. UMI Sez. B **1** (1998) n. 1.

[23] M.H. Protter, H.F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, Inc. (1967).

[24] M. Ramos, S. Terracini, C. Troestler, *Problèmes elliptiques sur-linéaires avec non-linéarité sans signe défini*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **325** (1997) 283–286.

[25] F. Uguzzoni, *A Liouville-type theorem on halfspaces for the Kohn laplacian*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1997) n. 1.

[26] F. Uguzzoni, *A non existence theorem for a semilinear Dirichlet problem involving critical exponent on halfspaces of the Heisenberg group*, NODEA **6** (1998) n. 2.