LUCIA ALESSANDRINI

Dipartimento di Matematica dell' Università di Parma,
Via D'Azeglio 85, 43100 Parma

CORRENTI POSITIVE: UNO STRUMENTO PER L'ANALISI GLOBALE SU VARIETÀ COMPLESSE

Conferenza tenuta il giorno 27 Aprile 1998

Lo scopo di questo testo è di presentare i temi principali riguardanti le correnti positive su varietà complesse. L'importanza di questo strumento, per coloro che studiano geometria complessa, è evidente; tuttavia non è semplice tenere le fila di una grande quantità di contributi sull'argomento, alcuni dei quali sono ormai pietre miliari su questa via. Vorremmo quindi delineare una "mappa" dei contributi che ci sono sembrati particolarmente significativi; per ovvie ragioni, rimandiamo ai testi originali non appena si voglia entrare nel merito dei singoli argomenti.

Lo scritto è composto di due parti (oltre a una appendice dedicata al lettore che affronta per la prima volta il tema delle correnti positive): nella prima si trattano principalmente i temi in riferimento alle correnti positive e chiuse, storicamente la classe più importante di correnti per le varietà complesse, in quanto generalizzazione naturale delle sottovarietà. Nella seconda si espongono risultati su correnti T positive pluriarmoniche o plurisubarmoniche, cioè caratterizzate da una condizione imposta alla corrente $i\partial\overline{\partial}T$, e naturali generalizzazioni delle funzioni plurisubarmoniche, nonché delle correnti chiuse. Questa scelta è motivata nel primo capitolo della seconda parte, partendo dall'ormai classico teorema di R. Harvey e J.R.

Lawson che caratterizza tramite correnti positive e pluriarmoniche l'esistenza di metriche kähleriane su varietà compatte.

1 Introduzione

Possiamo prendere il 1950 come "anno di nascita" degli studi sulle correnti, a motivo della pubblicazione, in quell'anno, del testo di L. Schwartz *Théorie des distributions* [Sc 50] e delle prime esposizioni in quell'anno a Princeton della teoria degli integrali armonici di G. de Rham, che porterà al libro del 1955 [dR 55], dove si introducono le correnti. Qui G. de Rham spiega l'uso del termine in questo modo: "la scelta del termine "corrente" è motivata dal fatto che nello spazio tridimensionale ordinario, correnti uno-dimensionali si possono interpretare come correnti elettriche" ([dR 55], nota 3 a p. 8).

Nate in ambiente reale, ben presto le correnti vengono utilizzate come strumento di analisi su varietà complesse, affiancate dallo strumento più algebrico/topologico della teoria dei fasci. Le radici specificamente complesse sono la teoria delle funzioni plurisubarmoniche (che descrivono la "convessità complessa" in analogia con la convessità classica) e lo studio dell'operatore $\overline{\partial}$.

La fase iniziale si può considerare conclusa alla fine degli anni Sessanta, con la pubblicazione dei due testi che ancora oggi sono i testi di riferimento:

- P. Lelong, *Plurisubarmonic functions and positive differential forms* [Le 68]

- H. Federer, *Geometric Measure Theory* [Fe 69].

Il primo si occupa direttamente del caso complesso, il secondo situa l'argomento "correnti" dentro il campo della teoria geometrica della misura.

In quegli anni, lo strumento della correnti inizia ad essere usato anche in geometria algebrica per lo studio dei cicli analitici e algebrici (combinazioni di sottovarietà), per esempio da A. Andreotti, F. Norguet ... ; in questo scritto non entreremo in questo settore, tuttora molto importante (vedi i lavori di J.P. Demailly), se non per qualche breve cenno nel capitolo 3.

Una seconda fase, molto vivace, può essere situata nel decennio 1970–1980; la possiamo far iniziare con il lavoro di J.R. King del 1971, [Kin 71], *The currents defined by analytic varieties*. In questa fase, lo studio ruota attorno al problema di capire quanto sono "distanti" le sottovarietà (o più in generale i cicli analitici), visti come correnti, dalle correnti in generale. Si cercano caratterizzazioni dei cicli analitici dentro l'ambiente delle correnti che permettano di sfruttare, da un lato, la struttura meno rigida delle correnti e dall'altro l'aspetto geometrico dei cicli. J.R. King imposta il lavoro direttamente nell'ambiente degli spazi analitici con singolarità, e, seguendo il lavoro di H. Federer e W. Fleming [FF 60], considera le classi di "correnti geometriche": correnti rettificabili, integrali, normali, piatte (vedi capitolo 3); qui caratterizza in vario modo i cicli analitici (vedi teoremi 3.1 e 3.2).

Insieme a J.R. King possiamo citare B. Shiffman e R. Harvey, che fra l'altro indeboliscono le condizioni di J.R. King per ottenere un ciclo analitico (per esempio riescono a togliere la condizione di positività, vedi teoremi 3.4 e 3.5). Questi autori danno importanti contributi anche su problemi di estensione di correnti e di altri oggetti analitici (vedi capitolo 4); citiamo inoltre la interessante memoria di R. Harvey *Holomorphic chains and their boundaries* [Ha 77].

Un discorso a parte meritano i fondamentali contributi di Y.T. Siu, soprattutto [Siu 74] e [Siu 75]. In particolare, Y.T. Siu usa tecniche di stime L^2 alla Hörmander e importanti risultati di E. Bombieri [Bo 70] e H. Skoda [Sk 72] per analizzare gli insiemi di livello $E_c(T)$ dei numeri di Lelong di una corrente chiusa e positiva T. Quello che dimostra è che si tratta di sottoinsiemi analitici chiusi di dimensione al massimo uguale alla bidimensione della corrente (vedi teorema 2.2); con questo risultato ottiene poi importanti teoremi di estensione di correnti e di mappe meromorfe (vedi capitolo 4).

Una terza fase è quella più recente, gli anni Ottanta e Novanta, periodo in cui viene approfondita ulteriormente la teoria delle correnti chiuse e positive, e viene applicata a problemi di geometria differenziale e geometria algebrica; inoltre si studiano problemi di estensione e di prodotto anche per classi più ampie di correnti. Spiccano i lavori fondamentali di J.P. Demailly e altri (H. Skoda, H. El Mir, N. Sibony).

Una delle novità di questo periodo, che lo distingue dalla fase precedente, è nel lavoro di R. Harvey e J.R. Lawson [HL 83], dove vengono caratterizzate le varietà compatte kähleriane in termini di correnti positive (vedi capitolo 6): ma non si tratta più di correnti chiuse, anzi in generale queste correnti non sono nè normali nè piatte, ma solo pluriarmoniche. Questa classe di correnti quindi diventa un nuovo oggetto di studio e ad essa è dedicata in particolare la seconda parte di questo scritto (si veda anche la memoria [Sil 96]).

Altre strade nuove stanno sicuramente emergendo, ma è forse presto per discernere le più significative.

2 Numeri di Lelong e regolarizzazione

Sia $1 \leq p \leq n-1$, sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$ e sia T una corrente di bidimensione (p,p) in U, *positiva* ($T^{p,p} \geq 0$). Siano

$$\alpha = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log|z|^2\,, \quad \beta = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z|^2 = \sum_j dx_j \wedge dy_j\,, \quad \text{se } z_j = x_j + iy_j\,,$$

le $(1,1)$-forme delle metriche, rispettivamente, di Fubini-Study su $\mathbb{C}^n - 0$ (ottenuta come pull-back da $\mathbb{P}^{n-1}$) ed euclidea su $\mathbb{C}^n$. Poniamo inoltre $B(a,r) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z-a| < r\}$.

La *misura variazione totale* $|T|$ (o *misura traccia*) di T si definisce come

$$|T| = T \wedge \frac{\beta^p}{p!}$$

(ovvero $\int \varphi d|T| = T(\varphi \wedge \beta^p/p!)$, e anche $|T| = \sum_{|I|=n-p} T_{I,I}(i/2)dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge (i/2)dz_n \wedge d\overline{z}_n$).

Se la palla $B(a,r)$ è contenuta in U, consideriamo il rapporto fra la misura della palla secondo $|T|$ e la sua misura euclidea:

$$n(T,a,r) := \frac{|T|(B(a,r))}{(\pi r^2)^p}\,.$$

Definizione 2.1 *Il* numero di Lelong di T in $a \in U$ *è* $n(T,a) := \lim_{r\to 0} n(T,a,r)$*, se tale limite esiste.*

Usando la nozione di densità, se μ è una misura positiva, si denota

$$\Theta^j(\mu,a,r) := \frac{1}{c_j r^j}\mu((B(a,r))\,,$$

dove c_j è il volume della palla unitaria di $\mathbb{R}^j$. La j-densità di μ nel punto a si definisce come

$$\Theta^j(\mu, a) := \lim_{r\to 0} \Theta^j(\mu, a, r)\,,$$

se tale limite esiste (si può vedere anche [Fe 69], 2.10.19). Quindi il numero di Lelong di una corrente $T^{p,p} \geq 0$ è la $2p$-densità della misura variazione totale $|T|$.

Teorema 2.1 *Se $T^{p,p} \geq 0$ è chiusa, allora $n(T, a, r)$ è una funzione non decrescente di r e quindi il limite della definizione 2.1 esiste ed è non negativo. Inoltre $n(T, a)$ è una funzione superiormente semicontinua in U, quindi localmente limitata.*

Dimostrazione. Il punto fondamentale è dimostrare che se T è liscia, $B(0, R) \subset\subset U$ e $0 < r < R$, allora

$$\frac{1}{(\pi R^2)^p}\int_{B(0,R)} T\wedge\beta^p - \frac{1}{(\pi r^2)^p}\int_{B(0,r)} T\wedge\beta^p = \int_{B(0,R)-B(0,r)} T\wedge\alpha^p\,,$$

che è positivo poiché $T \geq 0$. Per far questo, si usa la chiusura di T e il teorema di Stokes (per esempio [Le 68], p. 72).

Per controllare che $\limsup_{z\to a} n(T, z) \leq n(T, a)$, scegliamo per semplicità $a = 0$; dato che $\forall r > 0$ vale $B(z, r) \subset B(0, |z| + r)$, si ha

$$n(T, z) \leq n(T, z, r) \leq (1 + \frac{|z|}{r})^{2p} n(T, 0, r + |z|)\,.$$

Per $r^2 = |z|$, quando z tende a zero, la parte di destra converge a $n(T, 0)$. □

Osservazione 2.1 i) Il numero di Lelong $n(T, a)$ non dipende dalla scelta delle coordinate, e quindi si può definire per correnti positive su varietà complesse. La dimostrazione è piuttosto tecnica e si può vedere in [Siu 74], capitolo 4, o in [Le 77].

ii) Il numero di Lelong di una corrente chiusa e positiva in un punto z può essere studiato anche tramite un potenziale (plurisubarmonico): se T è una (k, k)-corrente chiusa e positiva su $\mathbb{C}^n$, esiste una funzione plurisubarmonica u tale che $\forall z \in \mathbb{C}^n$, $n(i\partial\bar\partial u, z) = n(T, z)$. Per quanto riguarda questo risultato, sue generalizzazioni e il suo uso, si possono vedere [Le 77], [Sk 72] e [Be 83].

ESEMPI.

i) Se T è a coefficienti lisci (o continui), il suo numero di Lelong è nullo in ogni punto. Quindi si possono definire i numeri di Lelong anche per correnti T almost-positive (e chiuse), ovvero tali che esiste una forma η con $T + \eta \geq 0$: infatti la parte liscia dà contributo nullo.

ii) Se T è una corrente definita da una sottovarietà complessa V, il suo numero di Lelong $n(T, a)$ è la molteplicità di V in a (vedere [GH 78] p. 391, o [Le 68], o [Siu 74], (3.7) per il caso liscio).

Sia ora $T^{p,p}$ una corrente positiva e chiusa, $c > 0$, e $E_c(T) := \{z \in U : n(T, z) \geq c\}$. Denotiamo con $\mathcal{H}_{2p}$ la misura di Hausdorff $2p$-dimensionale (a questo proposito si può vedere [Fe 69] oppure [Sh 68]).

PROPOSIZIONE 2.1 *$E_c(T)$ è un chiuso di U, e per ogni compatto $K \subset U$,*

$$\mathcal{H}_{2p}(E_c(T)) \cap K) < \infty .$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione deriva dal fatto che il numero di Lelong è una funzione superiormente semicontinua. Per la seconda, si può vedere [Siu 74], Lemma 3.2. $\square$

TEOREMA 2.2 *([Siu 74], Main Theorem). $E_c(T)$ è un sottoinsieme analitico di U, di dimensione $\leq p$.*

Non è possibile esporre brevemente i passi fondamentali della dimostrazione: conviene vedere la dimostrazione originale di Y.T. Siu (confronta anche [Siu 73]), che si avvale dei risultati di E. Bombieri [Bo 70] e H. Skoda [Sk 72], o anche [Ho 90] e [Le 77], che presentano dimostrazioni alternative.

Sia V una sottovarietà complessa di $\mathbb{C}^n$; definiamo il numero di Lelong generico di T su V come

$$n(T, V) := \inf_{z \in V} n(T, z) .$$

Il termine "generico" è motivato dalla seguente osservazione.

OSSERVAZIONE 2.2 Per q.o. $z \in V$, $n(T, z) = n(T, V)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $A = \{z \in V : n(T,z) > n(T,V)\}$; vale $A = \cup_{m\in\mathbb{N}}(E_{n(T,V)+1/m} \cap A)$, perciò per il teorema 2.2 A è unione di sottovarietà (proprie) di $\mathbb{C}^n$, e quindi è di misura nulla. $\square$

J.P. Demailly propone una generalizzazione dei numeri di Lelong, cambiando le $(1,1)$-forme α e β rispetto a cui si studia il rapporto $n(T,a,r)$, cioé introducendo dei "pesi"; riportiamo la definizione di numero di Lelong generalizzato.

DEFINIZIONE 2.2 *Sia X una varietà di Stein (ipotesi tecnica, per trattare il caso locale) e sia $\varphi : X \to [-\infty,+\infty)$ una funzione plurisubarmonica continua. Siano $B(r) := \{x \in X : \varphi(x) < r\}$ e $S(r) := \{x \in X : \varphi(x) = r\}$; $S(-\infty)$ è quindi l'insieme dei poli di φ. Se fissiamo una corrente $T^{p,p} \geq 0$ e chiusa, e supponiamo che $\exists R \in \mathbb{R}$ tale che $B(R) \cap \operatorname{supp} T \subset\subset X$, allora $T \wedge [(i/2)\partial\overline{\partial}\varphi]^p$ è una misura ben definita (vedi osservazione 7.3). Per ogni $r \in [-\infty, R)$, poniamo*

$$\begin{aligned} n(T,\varphi,r) &:= \int_{B(r)} T \wedge \left(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\varphi\right)^p \\ n(T,\varphi) &:= \lim_{r\to-\infty} n(T,\varphi,r) = \int_{S(-\infty)} T \wedge \left(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\varphi\right)^p ; \end{aligned}$$

chiamiamo quest'ultimo il numero di Lelong generalizzato di peso φ.

ESEMPIO. Se U è un aperto di $\mathbb{C}^n$, $a \in U$ e $\varphi(z) := \log|z-a|$, risulta che $B(r)$ è la palla euclidea di centro a e raggio e^r e, traslando le forme α e β in a, $\alpha = (i/\pi)\partial\overline{\partial}\varphi$ e $2\beta = i\partial\overline{\partial}e^{2\varphi}$. Da ciò si ricava che, con questa scelta del peso, il numero di Lelong ordinario si ottiene come limite, per $r \to 0$, di $n(T,\varphi,\log r)$ (il conto si può vedere per esempio in [De 93a] paragrafo 3).

Non è possibile dar conto qui dei risultati sui numeri di Lelong generalizzati: citiamo solo il fatto che il loro uso permette di semplificare le dimostrazioni di vari risultati sui numeri di Lelong classici, e di estenderne l'ambito di validità; si possono vedere i lavori [De 82b], [De 87] e [De 93a]. Un'altra generalizzazione dei numeri di Lelong è presentata nel capitolo 10.

Per parlare di *regolarizzazione di correnti*, ricordiamo innanzitutto che ogni corrente in carta locale può essere scritta come forma a coefficienti distribuzioni (vedi Appendice). Le distribuzioni possono essere regolarizzate per convoluzione, e questo permette di regolarizzare per convoluzione le correnti (si può vedere [GH 78], pp. 373-376, o [Ji 91]). Se T è una corrente su $\mathbb{R}^n$ o su $\mathbb{C}^n$, indichiamo con T_ε una corrente liscia che è stata ottenuta da T regolarizzando per convoluzione.

OSSERVAZIONE 2.3 Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$, e U_ε una successione di aperti che invade U; sia T una corrente su U. Regolarizzando per convoluzione, si può ottenere una successione $\{T_\varepsilon\}$ di correnti lisce, T_ε definita su U_ε, $T_\varepsilon(\varphi) \to T(\varphi)$ per ogni forma test φ. Se T è positiva, eventualmente passando ad una sottosuccessione le T_ε possono essere scelte positive ([Siu 74], (2.5)).

Se $V \subset\subset U$, per ogni forma test φ, $\int_V T_\varepsilon \wedge \varphi$ è ben definito per $\varepsilon \ll 1$; inoltre se T è di ordine zero e $|T|(bV) = 0$, si ha che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_V T_\varepsilon \wedge \varphi = \int_V T \wedge \varphi := T(\chi_V \varphi)\,.$$

In generale, se $\{T_n\}$ è una successione di correnti di bidimensione (p,p) lisce e positive su U, tali che per ogni compatto K di U e ω forma di una metrica hermitiana su U, $\sup_n \int_K T_n \wedge \omega^p < \infty$, allora esiste una sottosuccessione che converge a una corrente positiva su U ([Siu 74], (2.11)).

Tuttavia nel globale (su una varietà compatta M), se consideriamo la classe di coomologia di una corrente chiusa e positiva T, e cerchiamo dei rappresentanti lisci, possiamo ottenere una successione $\{T_n\}$ di correnti lisce, chiuse, reali, nella stessa classe di T e tali che $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$ per ogni forma test φ, ma in generale non le possiamo scegliere positive (vedi esempio dopo la definizione 7.1). Il difetto di positività, nel caso di $(1,1)$-correnti, è legato ai numeri di Lelong (vedi teorema 7.1).

La regolarizzazione per convoluzione può essere considerata anche su una varietà di Stein X, in quanto si può utilizzare una immersione $i : X \to \mathbb{C}^n$. Quindi se T è una corrente su X, consideriamo $(i_*T)_\varepsilon$, che sono correnti lisce su $\mathbb{C}^n$; non c'è un modo canonico per riportarle su X (ovviamente, mantenendo la bidimensione), ma se T è a supporto compatto si può usare un intorno tubolare, ovvero una mappa olomorfa ρ da un aperto contenente X (in $\mathbb{C}^n$) a X tale che $\rho \circ i = \mathrm{id}$. Chiamiamo $L_\varepsilon(T) := \rho_*((i_*T)_\varepsilon)$: si tratta di "buone" regolarizzazioni, nel senso che conservano la bidimensione, la positività, la chiusura e hanno supporto arbitrariamente vicino a quello di T. Per l'utilizzo di questo tipo di regolarizzazioni, si può vedere [JS 93].

3 Correnti e sottovarietà

Una classe fondamentale di correnti di bidimensione (p,p) su una varietà complessa M è data dalle correnti di integrazione su sottovarietà (lisce) di dimensione p; queste correnti risultano chiuse e positive. Si può estendere questo risultato al caso non liscio.

Proposizione 3.1 *Sia V una sottovarietà di M di dimensione p, e sia $\operatorname{Reg} V$ l'insieme dei suoi punti lisci; allora V determina una corrente $[V]$ su M di bidimensione (p,p) chiusa e positiva, definita da*

$$\varphi \to \int_{\operatorname{Reg} V} \varphi \qquad \forall \varphi \in D^{p,p}(M)\,.$$

La dimostrazione è stata data da Lelong in [Le 57] (si può vedere anche in [De 92b], teorema 3.5). Noi la vedremo come corollario del teorema di estensione 4.5.

Le correnti di integrazione di bidimensione $(n-1,n-1)$ sono esprimibili tramite la formula di Lelong-Poincaré. Nella sua forma più semplice, essa è espressa nella seguente proposizione:

Proposizione 3.2 *Sia f una funzione olomorfa non identicamente nulla su un aperto U di $\mathbb{C}^n$, e Z la ipersuperficie analitica luogo di zeri di f, cioé $Z = \{z \in U : f(z) = 0\}$. Allora vale la seguente uguaglianza di correnti:*

$$[Z] = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|f|\,.$$

Per avere un'idea della dimostrazione, supponiamo $f(z) = z_n$; allora

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|f| = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log|z_n|^2 = \frac{1}{2\pi i}\overline{\partial}\left(\frac{dz_n}{z_n}\right) = [\{z_n = 0\}]$$

per la formula di Cauchy (vedi Appendice).

In generale, se f è una funzione meromorfa su M, si possono definire le due ipersuperfici Z e P, rispettivamente date dall'insieme degli zeri e dall'insieme dei poli di f. Siano $\{Z_j\}$ e $\{P_k\}$ le loro componenti irriducibili e siano n_j ed m_k rispettivamente le molteplicità di f su Z_j e su P_k. Il divisore della funzione meromorfa f è definito come la corrente

$$D = \sum n_j[Z_j] - \sum m_k[P_k]\,. \tag{3.1}$$

PROPOSIZIONE 3.3 *(Formula di Lelong-Poincaré)*

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|f| = D\,.$$

Per la dimostrazione, si può vedere [Ha 77] p. 318.

Le correnti come in (3.1) rappresentano la naturale generalizzazione delle correnti di integrazione:

DEFINIZIONE 3.1 *Una* p-catena olomorfa *(o p-ciclo analitico) su una varietà M è una corrente T di bidim. (p,p) del tipo $T = \sum n_j[V_j]$, dove le V_j sono sottovarietà di dimensione p, $n_j \in \mathbb{Z}$ e la somma è localmente finita (le V_j possono essere viste come le componenti irriducibili del sottoinsieme analitico $V = \cup_j V_j$; quindi* supp $T = V$*).*

OSSERVAZIONE 3.1 i) Le p-catene olomorfe sono correnti chiuse e di ordine zero, che sono positive se e solo se $n_j \geq 0\ \forall j$. I loro numeri di Lelong sono interi.

ii) Localmente, ogni p-catena olomorfa può essere scritta come in (3.1). Useremo il termine p-catene olomorfe in generale, e il temine *p-cicli* per le p-catene olomorfe positive e compatte (nel senso che la somma è finita e le V_j sono compatte).

Un importante problema è quello di caratterizzare le p-catene olomorfe fra le correnti (chiuse e positive). Esso è stato affrontato principalmente usando la teoria della misura e le correnti "geometriche" di Federer (vedi [Kin 71]).

Data una metrica riemanniana (su M varietà differenziabile o su U aperto di $\mathbb{R}^n$), se v è un vettore dell'algebra esterna $\Lambda^r_x(M)$, denotiamo con $|v|_x$ la sua lunghezza rispetto alla metrica data.

Ricordiamo che una corrente T è detta di ordine zero se può essere estesa a un funzionale lineare continuo sullo spazio delle forme a coefficienti continui (e a supporto compatto). Denotiamo questo spazio di correnti con $\mathcal{M}_r(M)$. Le correnti di ordine zero sono dette anche *rappresentabili per integrazione* poiché se $T \in \mathcal{M}_r(U)$, esistono una misura di Radon positiva $||T||$ e una funzione $\vec{T}: U \to \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$, $||T||$-misurabile tale che $|\vec{T}|_x = 1$ per $||T||$-q.o. $x \in U$ e

$$T(\varphi) = \int \varphi(\vec{T}) d||T|| \qquad \forall \varphi \in D^r(U)$$

(vedi [Fe 69], 4.1.5 e 4.1.7).

Per una forma α, denotiamo con $||\alpha||^*$ la funzione su M definita da

$$||\alpha||^*(x) = \sup\{|\alpha(v)|,\ v\ r\text{-vettore decomponibile in } x, |v|_x \leq 1\}.$$

Fissato $K \subset M$, *la comassa di* α su K è

$$||\alpha||_K^* = \sup_{x \in K}\{||\alpha||^*(x)\}\,.$$

Se T è una corrente su M, definiamo la *massa di* T come

$$M(T) := \sup\{|T(\alpha)|, \alpha \in D^*(M), ||\alpha||_M^* \leq 1\}\,;$$

diremo che T ha massa finita se $M(T) < \infty$. Se $M(T) < \infty$, allora $T \in \mathcal{M}_r(U)$, mentre se $T \in \mathcal{M}_r(U)$, risulta $M(T) = ||T||(U)$ (vedi [Fe 69], 4.1.7).

Il legame con la misura variazione totale definita nella sezione 2 per le correnti positive è il seguente (vedi [Ha 77], Lemma 1.26): Se $T^{p,p} \geq 0$, esiste una costante c_p, $0 < c_p < 1$, tale che, per ogni compatto K,

$$c_p||T||(K) \leq |T|(K) \leq ||T||(K)\,.$$

Definizione 3.2 *La corrente $T \in D'_r(M)$ è detta* localmente normale *se sia T che dT sono di ordine zero. Lo spazio delle correnti localmente normali di dimensione r su M si denota con $\mathcal{N}_r^{\mathrm{loc}}(M)$, mentre usiamo il termine* normali *e il simbolo $\mathcal{N}_r(M)$ per le correnti localmente normali e a supporto compatto, cioé $\mathcal{N}_r(M) = \mathcal{N}_r^{\mathrm{loc}}(M) \cap E'_r(M)$.*

Lo spazio delle correnti localmente piatte è definito in genere come il completamento di $\mathcal{N}_r^{\mathrm{loc}}(M)$ rispetto alla norma piatta $\mathcal{F}_K$. Noi preferiamo dare la definizione seguente (per l'equivalenza fra le due definizioni, vedi [Fe 69], 4.1.18).

DEFINIZIONE 3.3 *Una corrente $T \in E'_r(M)$ è detta* piatta *se è della forma $T = R + dS$, dove R ed S sono forme a coefficienti in L^1_{loc}. Indicheremo con $\mathcal{F}_r(M)$ lo spazio delle correnti piatte. La corrente $T \in D'_r(M)$ è detta* localmente piatta *se $\forall \varphi \in C_0^\infty(M)$, φT è piatta, ovvero se $\forall x \in M$, $\exists S_x \in \mathcal{F}_r(M)$ tale che $x \notin \mathrm{supp}(T - S_x)$.*

Una delle possibili definizioni di corrente rettificabile è la seguente:

DEFINIZIONE 3.4 *Sia K un compatto di M. Diremo che T è una corrente di dimensione r* rettificabile in K *se $T \in E'_r(M)$ e $\forall \varepsilon > 0$, esistono un aperto $U \subset \mathbb{R}^s$, una funzione $f : U \to M$ lipschitziana e una r-catena poliedrale intera finita P in U (cioé una somma finita di r-simplessi lineari orientati) tali che $f(\mathrm{supp}\, P) \subset K$ e $M(T - f_* P) < \varepsilon$ (per P e $f_* P$ si può vedere [Fe 69] pp. 370-371 e anche [Bo 85] p. 290).*

Definiamo lo spazio $\mathcal{R}_r(M)$ delle correnti rettificabili su M come formato da quelle correnti che sono rettificabili in qualche compatto K di M, e lo spazio $\mathcal{R}_r^{\mathrm{loc}}(M)$ delle correnti localmente rettificabili su M come formato da quelle correnti che, vicino ad ogni punto, coincidono con una corrente rettificabile:

$$\begin{aligned} R_r^{\mathrm{loc}}(M) \quad = \quad & \{T \in D'_r(M) : \forall x \in M, \\ & \exists\, S_x \in \mathcal{R}_r(M) \text{ tale che } x \notin \mathrm{supp}(T - S_x)\}\,. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.2 (Per la dimostrazione, si può vedere [Ha 77] oppure [FF 60], oltre naturalmente a [Fe 69]).

i) Il bordo di una corrente localmente piatta è localmente piatto, mentre ciò non succede in generale per le correnti localmente rettificabili.

ii) Correnti localmente rettificabili sono di ordine zero e localmente piatte.

iii) Correnti localmente normali sono localmente piatte; correnti chiuse e di ordine zero sono localmente piatte.

iv) Se α è una forma a coefficienti funzioni localmente limitate, e $T \in \mathcal{F}_r^{\mathrm{loc}}(M)$, allora $T \wedge \alpha$ è localmente piatta; in particolare se $T \in \mathcal{F}_r^{\mathrm{loc}}(M)$, allora $\chi_Y T \in \mathcal{F}_r^{\mathrm{loc}}(M)$.

v) Le p-catene olomorfe sono correnti localmente rettificabili.

Esempi. Se u è una funzione plurisubarmonica, come corrente è una 0-corrente localmente normale, poiché lei e le sue derivate sono in L^1_{loc}. Questo non vale in generale per le correnti: una corrente plurisubarmonica e di ordine zero che non è localmente normale è descritta nell'esempio dopo il teorema 9.1.

Possiamo ora dare alcuni risultati di caratterizzazione: di essi non daremo alcuna dimostrazione, ma solo le indicazioni bibliografiche; in particolare si può consultare [Sk 84]. I primi risultati vogliono rispondere alla seguente domanda:

Quando una corrente positiva e chiusa è una p-catena olomorfa?

Teorema 3.1 *Sia T una corrente di bidimensione (p,p) , chiusa e positiva su una varietà M. Se $n(T,z)$ è un intero positivo per $\mathcal{H}_{2p}$-q.o. $z \in \operatorname{supp} T$, allora T è una p-catena olomorfa.*

Teorema 3.2 *Sia T una corrente di bidimensione (p,p), chiusa e positiva su una varietà M. Se $T \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}_{p,p}(M)$, allora T è una p-catena olomorfa.*

La dimostrazione di questi due risultati è data da J.R. King (teoremi 5.3.1 e 5.2.1 in [Kin 71]) e usa la teoria delle correnti geometriche. Il primo teorema è stato generalizzato come segue:

Teorema 3.3 *Sia T una corrente di bidimensione (p,p), chiusa e positiva su una varietà M. Se per ogni compatto K, esiste una costante $c > 0$ tale che $n(T,z) \geq c$ per $\mathcal{H}_{2p}$-q.o. $z \in (\operatorname{supp} T) \cap K$, allora T è una p-catena olomorfa a coefficienti numeri reali positivi, cioè $T = \sum c_j [Vj]$, con $c_j \in \mathbb{R}$, $c_j > 0$.*

Questa volta la dimostrazione non fa uso delle correnti geometriche, ma si basa su proprietà dei numeri di Lelong e teoremi di supporto, e si trova in [HaKi 72].

In una seconda fase, si lascia cadere l'ipotesi di positività, e si analizzano correnti localmente rettificabili su un aperto U di $\mathbb{C}^n$. La congettura generale è che una corrente localmente rettificabile e chiusa sia una p-catena olomorfa.

Esempio. Sia $\{a_j\}$ un insieme numerabile denso in $\mathbb{R}^n$, e sia $T = \sum[S_j]$, dove

$$S_j = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a_j| = 2^{-j}\}\,.$$

Allora $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}^n$, ma T è una corrente localmente rettificabile e chiusa, di dimensione 1.

Dall'esempio precedente vediamo che ci sono correnti localmente rettificabili con supporto "grande", quindi si aggiunge nella congettura un'ipotesi sul supporto. Il primo teorema di questo genere è il seguente ([HS 74]):

Teorema 3.4 *Sia $T \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}_{p,p}(U)$ una corrente chiusa su U. Se $p = n-1$, supponiamo che* $\operatorname{supp} T \neq U$*; se $p < n-1$, supponiamo che $\mathcal{H}_{2p+2}(\operatorname{supp} T) = 0$. Allora T è una p-catena olomorfa.*

Questo risultato generalizza il teorema 3.2, in quanto si dimostra che se T è anche positiva, il supporto di T ha misura $\mathcal{H}_{2p}$ localmente finita (Lemma 1.14 di [HS 74]). La dimostrazione consiste di due parti: prima si analizza il caso $p = n-1$ e poi si utilizzano tecniche di proiezione e slices (vedere [HS 74], teoremi 2.6 e 2.7, o [Ha 77]).

B. Shiffman in [Sh 86] migliora i risultati precedenti, usando tecniche di estensioni di funzioni meromorfe e slices di correnti, con il teorema seguente (che permette di prendere come ipotesi, per il caso $p < n-1$, $\mathcal{H}_{2p+3}(\operatorname{supp} T) = 0$ (vedi teorema 3.4)).

Teorema 3.5 *Sia $T \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}_{n-1,n-1}(U)$ una corrente chiusa su U: allora T è una $(n-1)$-catena olomorfa.*

L'idea della dimostrazione è la seguente: essendo T localmente rettificabile (e quindi localmente piatta), localmente esiste u in L^1_{loc} tale che $T = i\partial\bar\partial u$; si tratta ora di costruire una funzione meromorfa f che risolva l'equazione $(1/\pi)\log|f| = u$, e poi di usare la formula di Lelong-Poincaré.

Un altro versante dello studio riguardante le catene olomorfe è quello degli spazi dei cicli.

Sia M una varietà complessa: chiamiamo $C_p^+(M)$ l'insieme dei p-cicli su M (vedi osservazione 3.1: si tratta di combinazioni lineari finite di sottovarietà compatte p-dimensionali di M con coefficienti interi positivi). Se M è un aperto di una varietà proiettiva, è possibile dare a $C_p^+(M)$ una buona struttura di spazio analitico (il normalizzato della varietà di Chow, vedi [AN 67] e anche [NS 77]). Più in generale, D. Barlet costruisce lo spazio analitico dei p-cicli, $C_p^+(X)$, per ogni spazio analitico complesso X, e ne studia le proprietà ([Bar 75] e [Bar 78], e anche [Cas 77]). In particolare, A. Fujiki ([Fu 78] e [Fu 82]) e F. Campana ([Cam 80]) dimostrano che se X è uno spazio analitico compatto nella classe C (ovvero immagine meromorfa di una varietà kähleriana), ogni $C_p^+(X)$ ha componenti irriducibili compatte e nella classe C. Un uso interessante delle proprietà degli spazi dei cicli è di J. Varouchas, di cui riportiamo il risultato più importante:

TEOREMA 3.6 *([Va 84, Va 85]) Se M è una varietà kähleriana, $C_p^+(M)$ è uno spazio analitico kähleriano.*

Questo permette di dimostrare per esempio che, se M è una varietà kähleriana, $f : M \to X$ è una mappa olomorfa, propria e suriettiva a fibre equidimensionali in una varietà X, allora X è kähleriana. Infatti la mappa che associa ad ogni punto x di X la sua fibra $f^{-1}(x)$ (di dimensione m) immerge X in $C_m^+(M)$, e quindi gli fa ereditare la metrica kähleriana.

4 Teoremi di supporto, di cut-off e di estensione

Intuitivamente, vorremmo dimostrare che *le correnti chiuse e positive hanno bisogno di "abbastanza spazio", in quanto assomigliano a sottovarietà*; ovvero

"Sia T una corrente di bidimensione (p, p), chiusa e positiva su una varietà M.

(a) Se $\mathcal{H}_{2p}(\operatorname{supp} T) = 0$, allora $T = 0$.

(b) Se supp $T \subset Y$, dove Y è un sottoinsieme analitico di dimensione p , con $\{Y_j\}$ le sue componenti irriducibili di dimensione p, allora $T = \sum n_j[Y_j]$".

Federer prova che in realtà questo risultato è tipico delle correnti localmente piatte ([Fe 69], 4.1.15 e 4.1.20):

TEOREMA 4.1 *Sia $T \in \mathcal{F}_r^{\mathrm{loc}}(U)$ una corrente su U aperto di $\mathbb{R}^n$.*

(a) Se T è supportata in un chiuso A con $\mathcal{H}_r(A) = 0$, allora $T = 0$.

(b) Se T è supportata su una sottovarietà liscia orientata A di dimensione r, allora T è della forma $f[A]$, con $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(A)$.

COROLLARIO 4.1 *Sia $T \in \mathcal{F}_{p,p}^{\mathrm{loc}}(U)$, U aperto di $\mathbb{C}^n$, una corrente chiusa supportata su un sottoinsieme analitico Y di dimensione p. Allora $T = \sum c_j[Y_j]$, dove $c_j \in \mathbb{R}$ e $\{Y_j\}$ sono le componenti irriducibili di dimensione p di Y.*

DIMOSTRAZIONE. Si può scrivere Y come $Y = A \cup B$, dove $A = (\mathrm{Sing}Y) \cup (\cup_k A_k)$, A_k le componenti irriducibili di Y di dimensione minore di p (e quindi $\dim A < p$), e $B = (\cup_j Y_j) \cap \mathrm{Reg}\, Y$. Vale $T = \chi_A T + \chi_B T$, ma il primo addendo è nullo per il teorema 4.1(a), poiché $\chi_A T$ è ancora localmente piatta. Per il teorema 4.1b), dato che B è una sottovarietà liscia di $U - \mathrm{Sing}Y$, si ha che esiste una funzione localmente integrabile f con $T = \chi_B T = f[B]$; ma $dT = 0$, quindi f è costante sulle componenti connesse, ovvero esistono $c_j \in \mathbb{R}$ con $f = c_j$ su Y_j. Perciò $T = \sum c_j[Y_j]$. □

Nell'ambiente delle correnti chiuse e positive, Y.T. Siu dimostra il seguente risultato di cut-off, usando i numeri di Lelong al posto della teoria delle correnti geometriche.

TEOREMA 4.2 *Sia T una corrente di bidimensione (p,p), chiusa e positiva su un aperto U di $\mathbb{C}^n$;*

(a) se A è un sottoinsieme di U tale che $\mathcal{H}_{2p}(A) = 0$, allora $\chi_A T = 0$.

(b) se Y è un sottoinsieme analitico di dimensione p, con $\{Y_j\}$ le sue componenti irriducibili di dimensione p, e $c_j := n(T, Y_j)$, allora $\chi_Y T = \sum c_j[Y_j]$.

La dimostrazione di (a), che può essere fatta derivare dal teorema 4.1 ricordando che una corrente chiusa e positiva è localmente piatta, si può vedere in [Siu 74], Lemma 3.3, dove si usa solamente la definizione di misura di Hausdorff e il fatto che $n(T,a)$ è una funzione superiormente semicontinua di a e $n(T,a,r)$ è non decrescente in r. Questo permette di concludere che, se $\mathcal{H}_{2p}(A) = 0$, allora $|T|(A) = 0$. Nelle correnti positive, se i coefficienti diagonali $T_{I,I}$, che sono quelli coinvolti nell'espressione di $|T|$, sono nulli, lo sono anche tutti gli altri; ne risulta $T = 0$. La dimostrazione di (b) si trova in [Siu 74], Proposizione 12.3 e Lemma 9.6.

Il teorema seguente permette di ottenere una "decomposizione in sottovarietà" per una corrente chiusa e positiva; la dimostrazione si può vedere in [De 93a], (6.19).

TEOREMA 4.3 *Sia $T^{p,p}$ una corrente chiusa e positiva; allora $T = \sum_j \lambda_j[A_j]+R$, con A_j sottovarietà di dimensione p, $0 < \lambda_j = n(T,A_j)$, R corrente positiva e chiusa con $\dim E_c(R) < p \ \forall c$.*

Quindi il legame fra sottovarietà e correnti chiuse e positive è duplice: ogni sottovarietà di dimensione pura determina una corrente chiusa e positiva, e ogni tale corrente è "decomponibile in sottovarietà", come dal teorema precedente. Sul tema dei sottoinsiemi analitici visti nell'ottica delle correnti si veda [Ch 89].

I risultati di *estensione di correnti* si situano nell'ambito di più generali problemi di estensione di oggetti analitici, che possono essere così schematizzati:

Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$, A un chiuso di U. Data una classe di "oggetti analitici o lisci" su $U - A$, dare condizioni sulla classe e su A che assicurino che gli oggetti possano essere estesi attraverso A (naturalmente, $\mathbb{C}^n$ può essere rimpiazzato da una varietà liscia M).

Le condizioni che solitamente si considerano su A sono di due tipi:

- o si considera la misura di Hausdorff di A
- o si suppone che A sia (contenuto in) un sottoinsieme analitico (o più generalmente pluripolare) e si pongono delle ipotesi sulla sua dimensione.

Ci sono poi risultati, che noi non tratteremo, dove si prende in considerazione, nell'ambiente delle varietà CR, quanta struttura complessa ha A (vedi [E 84] e [Sib 85]).

Per quanto riguarda la classe di oggetti, noi ci limiteremo a parlare di correnti, escludendo quindi per esempio risultati classici su estensione di funzioni olomorfe, plurisubarmoniche, meromorfe; per una visione più ampia si può vedere [HP 75].

Di estensione di correnti si occupa innanzitutto P. Lelong [Le 68]:

DEFINIZIONE 4.1 *Sia A un chiuso di M (o di un aperto U di $\mathbb{C}^n$), e sia T una corrente su $M - A$. Una corrente $\tilde{T}$ su M si dice estensione di T (attraverso A) se $\forall \varphi \in D^*(M-A)$, $T(\varphi) = \tilde{T}(\varphi)$.*

La possibilità di estendere correnti di ordine zero è legata alla loro massa "attraverso A".

PROPOSIZIONE 4.1 *([Le 68], proposizione I.3)*
Una corrente $T \in \mathcal{M}_r(M-A)$ ammette un'estensione $\tilde{T} \in \mathcal{M}_r(M)$ se e solo se $\forall U \subset\subset M$, $||T||(U) = M(T)(U) < \infty$.

L'estensione di ordine zero "più naturale" è l'estensione banale, che ora descriviamo. Consideriamo su $U - A$ la corrente di ordine zero data da

$$T = \sum_{|I|=k,|J|=k} T_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J \,.$$

Se vale che per ogni compatto K di U, le misure $T_{I,J}$ soddisfano $T_{I,J}(K \cap (U - A)) < \infty$, allora si può definire un'estensione $T^\circ_{I,J}$ di ogni coefficiente $T_{I,J}$ a tutto U, ponendo $T^\circ_{I,J}(K) := T_{I,J}(K - A)$. L'estensione T° della corrente T che si ottiene ponendo

$$T^\circ = \sum_{|I|=k,|J|=k} T^\circ_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

si chiama *estensione banale (o nulla)* di T attraverso A; essa infatti non aumenta la massa ([Le 68], proposizione I.4).

La corrente T° può essere vista anche come limite di correnti troncate, in questo modo: siano $\chi_n \in C^\infty_0(M-A)$, $0 \le \chi_n \le 1$, funzioni che invadono $M - A$, tendendo alla funzione caratteristica χ_{M-A}

(ovvero tali che per ogni compatto K di $M - A$, $\chi_n = 1$ su K, per n grande). Risulta

$$T^\circ(\varphi) = \lim_{n\to\infty} T(\chi_n \varphi) \qquad \forall \varphi \in D^{p,p}(M)\,,$$

ovvero $T^\circ = \lim_{n\to\infty} \chi_n T$, da cui $\chi_A T^\circ = 0$.

Se T è localmente normale, anche le $\chi_n T$ lo sono.

Per quanto riguarda l'estensione di correnti chiuse e positive, il risultato principale è il seguente (vedi [Ha 74]):

TEOREMA 4.4 *Sia M una varietà e A un chiuso di M; sia T una corrente di bidimensione (p,p), chiusa e positiva su $M - A$. Se $\mathcal{H}_{2p-1}(A) = 0$, allora esiste un'unica estensione chiusa e positiva di T attraverso A, ed è T°.*

DIMOSTRAZIONE.

Unicità. Se T_1 e T_2 sono due estensioni di T, chiuse e positive, $T_1 - T_2$ risulta una corrente localmente piatta, di bidimensione (p,p), supportata su A. Dal teorema del supporto di Federer (teorema 4.1), $T_1 - T_2 = 0$.

Esistenza. Si tratta innanzitutto di provare che $\forall a \in A$, esiste un suo intorno U tale che $||T||(U - A) < \infty$. Questo si ottiene proiettando opportunamente T su piani complessi di dimensione p, di modo da ottenere delle funzioni in L^1_{loc} che si estendono attraverso le proiezioni di A (si può vedere [Ha 74], teorema 6). Questo permette di considerare l'estensione banale T°, che è ovviamente positiva. Considerando $T^\circ = \lim_{n\to\infty} \chi_n T$, se ne deduce che T° è localmente piatta. Perciò anche dT° è localmente piatta, ma essendo supportata su A, è nulla (teorema 4.1). □

Questo teorema era stato preceduto da un caso speciale importante, quello riguardante le correnti di integrazione ([Sh 68]):

TEOREMA 4.5 *Sia M una varietà, A un chiuso di M e W una sottovarietà di dimensione p di $M - A$; se $\mathcal{H}_{2p-1}(A) = 0$, allora $\overline{W}$ è una sottovarietà di dimensione p di M.*

È possibile ora dare una dimostrazione della proposizione 3.1. Sia $V = \operatorname{Reg} V \cup \operatorname{Sing} V$, dove $\dim \operatorname{Sing} V \leq p-1$, e quindi $\mathcal{H}_{2p-1}(\operatorname{Sing} V) = 0$. $[\operatorname{Reg} V]$ è una corrente chiusa e positiva su $M - \operatorname{Sing} V$, poiché $\operatorname{Reg} V$ è una sottovarietà liscia di $M - \operatorname{Sing} V$; dal teorema 4.4, l'estensione banale $[\operatorname{Reg} V]^\circ$ è chiusa e positiva. Essa è proprio la corrente che nella proposizione 3.1 è indicata con $[V]$: infatti

$$[\operatorname{Reg} V]^\circ(\varphi) = \int_{\operatorname{Reg} V} \varphi \qquad \forall \varphi \in D^{p,p}(M)\,.$$

Per quanto riguarda l'estensione attraverso sottoinsiemi analitici, il risultato-base è in [Siu 74].

TEOREMA 4.6 *Sia M una varietà e Y un sottoinsieme analitico di M; sia T una corrente di bidimensione (p,p), chiusa e positiva su $M - Y$. Se* $\dim Y \leq p-1$, *oppure* $\dim Y \leq p$ *e T si estende come corrente chiusa e positiva attraverso Y in un intorno di un punto, allora esiste un'unica estensione chiusa e positiva di T attraverso Y, ed è T°.*

Anche questo risultato era stato preceduto dal caso delle correnti di integrazione ([Bi 64]):

TEOREMA 4.7 *Sia M una varietà, Y una sottovarietà di M e W una sottovarietà di dimensione pura p di $M - Y$, tale che per ogni compatto K di M,* $\operatorname{vol}(K \cap W) < \infty$. *Allora $\overline{W}$ è una sottovarietà di M di dimensione pura p.*

Il teorema precedente può anche essere considerato come quello che ha dato l'avvio a teoremi di estensione attraverso sottovarietà con stime di massa: in questa ottica, i tre risultati principali sono (vedi poi la sezione 8):

TEOREMA 4.8 *([HP 75], teorema 2.2). Sia M una varietà e V una sottovarietà di M di dimensione p; sia T una corrente di bidimensione (p,p), chiusa e positiva su $M - V$. Se T ha massa localmente finita attraverso V (il che equivale a dire che esiste l'estensione positiva T°), allora T° è chiusa.*

TEOREMA 4.9 *([Sk 82]). Sia M una varietà e Y un sottoinsieme analitico di M; sia T una corrente chiusa e positiva su $M - Y$. Se T ha massa localmente finita attraverso Y , allora T° è chiusa.*

Teorema 4.10 *([E 84]). Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$ e A un chiuso pluripolare completo di U; sia T una corrente chiusa e positiva su $M - A$. Se T ha massa localmente finita attraverso A, allora T° è chiusa.*

Ricordiamo che un chiuso A è detto *pluripolare completo* in U se esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di U e delle funzioni plurisubarmoniche h_i su U_i tali che $A \cap U_i = \{z \in U_i : h_i(z) = -\infty\}$. In particolare i sottoinsiemi analitici sono pluripolari completi, poiché se f è una funzione olomorfa su U, $\log|f|$ è una funzione plurisubarmonica su U, che vale $-\infty$ sul luogo di zeri di f. Si può estendere ulteriormente la classe dei chiusi A parlando di insiemi *q-polari completi* (vedi [Sib 85]), che comprendono come caso $q = 0$ i pluripolari completi, e anche i chiusi A con $\mathcal{H}_{2q}(A) < \infty$.

I tre teoremi sopra citati sono stati dimostrati usando tecniche abbastanza diverse tra loro, e tutte di importanza che va al di là del singolo risultato; si vedano quindi i lavori originali. Essi danno come corollari dei risultati di cut-off: se infatti T è chiusa e positiva su U, allora $\chi_{U-A}T$ è l'estensione banale di $T|_{U-A}$ attraverso A, quindi è chiusa. Perciò $\chi_A T = T - \chi_{U-A}T$ è una corrente chiusa e positiva su U.

5 Correnti e mappe olomorfe

Siano M ed N varietà complesse di dimensione, rispettivamente, m ed n, sia $f : M \to N$ una mappa olomorfa e $T \in E'_{p,q}(M)$ una corrente a supporto compatto; la *corrente immagine diretta di T* è $f_*T \in E'_{p,q}(N)$ definita come

$$(f_*T)(\varphi) = T(f^*\varphi) \qquad \forall \varphi \in E^{p,q}(N)\,.$$

Se f è una mappa propria, e $T \in D'_{p,q}(M)$, l'immagine diretta $f_*T \in D'_{p,q}(N)$ si può definire come sopra, poiché $\operatorname{supp} f^*\varphi$ è compatto $\forall \varphi \in D^{p,q}(N)$.

In generale, le classi di correnti geometriche sono conservate dall'immagine diretta (vedi [Kin 71]); invece se T è una corrente liscia, f_*T non è necessariamente una corrente liscia, ovvero $f_*(E^{p,q}(M)) \not\subset E^{p,q}(N)$. Quando questo vale, tuttavia, possiamo definire in modo naturale il pull-back di correnti. Vediamo il caso più importante:

PROPOSIZIONE 5.1 *Siano M ed N varietà complesse, con $m = \dim M$ e $n = \dim N$ e $k := m - n$, e sia $f : M \to N$ una submersione olomorfa, cioé una mappa olomorfa e suriettiva di rango n in ogni punto $x \in M$. Se $p \geq k$, e $\alpha \in D^{p,p}(M)$, allora $f_* \alpha \in D^{p-k,p-k}(N)$. In questo caso, la mappa f_* è detta anche* integrazione lungo la fibra*.*

DIMOSTRAZIONE. Se $k = 0$, il risultato è ovvio poiché f è localmente invertibile. Altrimenti, il punto chiave è che, dovendo provare un risultato locale, se $p > k$, possiamo supporre che N sia un aperto di $\mathbb{C}^n$ con coordinate $(z_1, \ldots, z_n)$, che $M = N \times U$, U aperto di $\mathbb{C}^k$ con coordinate $(z_{n+1}, \ldots, z_m) := (z_L)$ e che $f : N \times U \to N$ sia la proiezione sul primo fattore. Se $\alpha = \sum_{|I|=|J|=p} \alpha_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$, basta controllare che $f_* \alpha = \sum_{|A|=|B|=p-k} \gamma_{A,B} dz_A \wedge d\bar{z}_B$, con

$$\gamma_{A,B}(z_1, \ldots, z_n) = \int_{(z_1,\ldots,z_n)\times U} \alpha_{A_L,B_L}(z_1, \ldots, z_m) dV \,,$$

dove dV è la forma di volume su U, cioè $dV = (i/2) dz_{n+1} \wedge d\bar{z}_{n+1} \wedge \ldots \wedge (i/2) dz_m \wedge d\bar{z}_m$.

Se $p = k$, sia $F_y = f^{-1}(y)$ la fibra di y, che è una sottovarietà liscia di M di dimensione k, e $\alpha \in D^{p,p}(M)$; allora $f_* \alpha \in D^{0,0}(N)$ è la funzione liscia

$$(f_* \alpha)(y) = \int_{F_y} \alpha$$

(più in generale, vedi la Proposizione 5.2). □

COROLLARIO 5.1 e DEFINIZIONE. *Sia $f : M \to N$ una submersione olomorfa con fibra di dimensione k; se $p \geq k$ e $T \in D'_{p-k,p-k}(N)$, possiamo definire $f^* T \in D'_{p,p}(M)$ come*

$$(f^* T)(\alpha) = T(f_* \alpha) \qquad \forall\, \alpha \in D^{p,p}(M) \,.$$

Se T è positiva e chiusa, anche $f^* T$ risulta positiva e chiusa (vedi anche [Siu 74], capitolo 2).

E' interessante vedere quanto una mappa olomorfa si discosta da una submersione (nell'osservazione che segue, che cita risultati classici di R. Remmert, in generale M ed N sono spazi analitici complessi).

OSSERVAZIONE 5.1 Sia $f : M \to N$ una mappa olomorfa, propria e suriettiva. Allora esiste un sottoinsieme analitico proprio R di N fuori del quale f è una submersione olomorfa (cioé $f|_{M-f^{-1}(R)} : M - f^{-1}(R) \to N - R$ è una submersione olomorfa), ed esiste un sottoinsieme analitico Y di N di codimensione almeno due fuori del quale f è a fibre equidimensionali.

Per quanto riguarda il secondo caso, si ha il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 5.2 *([St 67], teorema 3.8). Sia $f : M \to N$ una mappa olomorfa a fibre di dimensione $k = m - n > 0$, e sia α una forma di bigrado (k, k), a coefficienti continui e a supporto compatto su M. Allora $h(y) := \int_{f^{-1}(y)} \nu_f \alpha$ (dove ν_f è la molteplicità della fibra) è una funzione continua su N. In generale, h non è liscia, anche se α lo è.*

Le correnti di integrazione lungo la fibra sono i casi più semplici di slices di correnti: per questo importante argomento si può vedere [Kin 71] o [R 96] o [Siu 74], capitolo 10, oltre naturalmente a [Fe 69].

Per il caso particolare, ma anche particolarmente importante, di una qualsiasi mappa olomorfa e di *(1,1)-correnti chiuse e positive* T su N, si può procedere in questo modo: possiamo scegliere un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ della varietà N tale che $T|_{U_i} = i\partial\overline{\partial}h_i$, h_i funzione plurisubarmonica su U_i.

Ponendo $S_{-\infty}(h_i) = \{z \in U_i : h_i(z) = -\infty\}$, è facile vedere che $S_{-\infty}(T) := \cup_i S_{-\infty}(h_i)$ non dipende in realtà né dalla scelta del ricoprimento né dalla scelta dei potenziali locali h_i, poiché se $T|_{U_i} = i\partial\overline{\partial}k_i$, $h_i - k_i$ è una funzione pluriarmonica e quindi liscia. Si ha dunque il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 5.3 *Sia $f : M \to N$ una mappa olomorfa e T una $(1,1)$-corrente chiusa e positiva su N tale che $f(M) \not\subset S_{-\infty}(T)$; allora si può definire una $(1,1)$-corrente chiusa e positiva f^*T su M che gode delle seguenti proprietà:*

(i) $f_*(f^*T) = T$

(ii) se α è una $(1,1)$-forma chiusa tale che $T = \alpha + i\partial\overline{\partial}u$, allora $f^*T = f^*\alpha + i\partial\overline{\partial}(u \circ f)$.

DIMOSTRAZIONE. Scelto un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ della varietà N tale che $T|_{U_i} = i\partial\overline{\partial}h_i$, l'ipotesi assicura che $(h_i \circ f)$ non è identicamente $-\infty$ e quindi è una funzione plurisubarmonica su $f^{-1}(U_i)$. Se definisco $f^*T|_{f^{-1}(U_i)} := i\partial\overline{\partial}(h_i \circ f)$, su $f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j)$ si ha $i\partial\overline{\partial}(h_i \circ f) = i\partial\overline{\partial}(h_j \circ f)$, quindi ho una $(1,1)$-corrente globale, chiusa e positiva. E' semplice controllare che f^*T verifica le proprietà richieste. $\square$

OSSERVAZIONE 5.2 Sia $f : M \to N$ una submersione olomorfa e sia $T \in D'_{n-1,n-1}(N)$ una corrente chiusa e positiva; è facile provare, scegliendo opportune carte locali, che $f^*T \in D'_{m-1,m-1}(M)$ come definita nel corollario 5.1 coincide con il pull-back costruito nella proposizione precedente.

ESEMPIO. Sia $f : M \to N$ una mappa olomorfa e propria, e sia V una sottovarietà di M di dimensione p; per un teorema di R. Remmert, $f(V)$ è una sottovarietà di N. Dal punto di vista delle correnti, $f_*[V]$ è una corrente di N di bidimensione (p,p).

Ora, se la fibra generica (cioè $f^{-1}(y)$ per $y \in N - R$, vedi ossrvazione 5.1) di $f|_V$ ha dimensione positiva, risulta $\dim f(V) < p$ e quindi $f_*[V] = 0$: infatti $\forall \alpha \in D^{p,p}(N)$, $\alpha|_{\operatorname{Reg} f(V)} = 0$ e quindi $f^*\alpha|_{\operatorname{Reg} V} = 0$ per cui $f_*[V](\alpha) = [V](f^*\alpha) = 0$.

Se invece la fibra generica di $f|_V$ ha dimensione zero, significa che $f|_V$ è una mappa finita, ovvero che è un rivestimento ramificato, per cui fuori di R è un rivestimento di grado finito r. In questo caso, $f_*[V] = r[f(V)]$, poiché $\forall \alpha \in D^{p,p}(N)$,

$$f_*[V](\alpha) = [V](f^*\alpha) = \int_{V-f^{-1}(R)} f^*\alpha = r\int_{f(V)-R} \alpha = r[f(V)](\alpha)\,.$$

Il secondo caso trattato nell'esempio, quello in cui la fibra generica è di dimensione zero, si collega a quello delle modificazioni fra varietà complesse. Ne ricordiamo la definizione.

DEFINIZIONE 5.1 *Siano M ed N varietà complesse di dimensione n; una mappa $f : M \to N$ olomorfa, propria e suriettiva è una* modificazione *se esiste un sottoinsieme analitico Y di N (di codimensione almeno due) tale che $f|_{M-f^{-1}(Y)} : M - f^{-1}(Y) \to N - Y$ è un biolomorfismo.*

$E := f^{-1}(Y)$ risulta essere un divisore (sottoinsieme analitico di codimensione pura 1), detto il divisore eccezionale *della modificazione, mentre Y è detto il* centro *della modificazione.*

Un blow-up (o scoppiamento) di centro liscio *(vedi per es. [GH 78], pp. 602-605) è un caso particolare di modificazione.*

Nel caso di modificazioni, si hanno i seguenti risultati:

PROPOSIZIONE 5.4 *Sia $f : \tilde{M} \to M$ una modificazione di centro Y.*

(a) Se $\alpha \in D^{p,p}(M)$, allora $f_*(f^*\alpha) = \alpha$.

(b) Sia V una ipersuperficie irriducibile di M e $\tilde{V}$ la sua trasformata stretta, ovvero $\tilde{V} = \overline{f^{-1}(V - V \cap Y)}$. Risulta la seguente uguaglianza di (1,1)-correnti:

$$f^*[V] = [\tilde{V}] + \sum c_j[E_j],$$

con $c_j \in \mathbb{R}$ e $\{E_j\}$ le componenti irriducibili del divisore eccezionale E.

(c) Data una $(1,1)$-corrente T chiusa e positiva su M, la corrente f^*T che soddisfa (i) e (ii) della proposizione 5.3 è unica.

DIMOSTRAZIONE. Nel primo caso, $f_*(f^*\alpha)$ è una corrente a coefficienti funzioni L^1_{loc} che coincide con una forma liscia fuori di Y, e quindi ovunque. Nel secondo caso, $f^*[V]$ e $[\tilde{V}]$ sono chiuse e positive, quindi la loro differenza è una corrente chiusa e di ordine zero, supportata su E; basta ora usare un teorema di supporto, per esempio il corollario 4.1. Nel caso delle correnti, dato che due candidate dovrebbero coincidere fuori di E, basta esaminare la loro parte su E. Per la condizione (ii), la loro differenza è $i\partial\overline{\partial}u$, e anche del tipo $\sum c_j[E_j]$, il che implica che sia nulla. □

Se la modificazione è uno scoppiamento di centro liscio, si ha un interessante legame fra i numeri di Lelong generici della corrente sul centro e quelli del suo pull-back (univocamente definito da (c) della proposizione precedente) sul divisore eccezionale. La dimostrazione di questo risultato usa i legami fra i numeri di Lelong di una corrente e quelli delle sue slices lungo opportune sottovarietà lisce.

PROPOSIZIONE 5.5 *([AB 99], teorema 3.4). Sia $f : \tilde{M} \to M$ uno scoppiamento di centro liscio Y e di divisore eccezionale E. Se T è una $(1,1)$-corrente chiusa e positiva su M, allora $n(T,Y) = n(f^*T,E)$.*

Proseguiremo l'analisi del legame fra correnti e modificazioni nel capitolo 10.

6 Correnti e metriche

In questo capitolo cercheremo di spiegare come si possono utilizzare correnti positive per studiare metriche hermitiane su varietà complesse compatte, passando attraverso le forme fondamentali (o forme di Kähler) delle metriche hermitiane e la dualità fra forme e correnti. Cronologicamente, in questo tipo di uso delle correnti positive emerge per la prima volta l'importanza delle correnti non chiuse ma $\partial\overline{\partial}$-chiuse (e quindi della coomologia di Aeppli). Partiremo più in generale da varietà quasi complesse e da forme simplettiche.

DEFINIZIONE 6.1 *Sia M una varietà differenziabile reale di dimensione $2n$. Una* struttura simplettica *su M è una 2-forma ω* chiusa *e non degenere (cioè $\omega^n \neq 0$). La presenza di una struttura simplettica implica che M sia orientabile.*

Una struttura quasi complessa *J su M è un automorfismo di TM tale che $J^2 = -\mathrm{id}$. La presenza di una struttura quasi complessa implica che M sia orientabile, e dà una struttura di spazio vettoriale complesso a ogni spazio tangente T_xM.*

DEFINIZIONE 6.2 *Sia (M,J) una varietà quasi complessa con una 2-forma ω non degenere. Diremo che J è* dominata (tamed) *da ω se $\omega(v,Jv) > 0$ $\forall v \neq 0$, $v \in TM$. Geometricamente, questo significa che $\forall x \in M$, ω si restringe a una forma definita positiva su ogni retta complessa* $\mathrm{Span}(v,Jv)$ *di T_xM.*

Diremo che ω e J sono compatibili *(o che J è* calibrata *da ω) se J è dominata da ω e vale*

$$\omega(Jv,Jw) = \omega(v,w) \qquad v,w \in TM\,.$$

In questo caso, la forma bilineare g_J definita da

$$g_J(v,w) = \omega(v,Jw) \qquad v,w \in TM$$

è simmetrica, definita positiva e J-invariante, cioè è una metrica riemanniana J-invariante su M . Viceversa, data su (M, J) una metrica riemanniana g che sia J-invariante, la 2-forma ω data da

$$\omega(v, w) := g(Jv, w) \qquad v, w \in TM\,,$$

è non degenere e compatibile con J. Essa è detta la forma di Kähler*, o* forma fondamentale*, della metrica g.*

TEOREMA 6.1 *([MS 95], proposizione 4.1). Sia M una varietà differenziabile reale di dimensione $2n$.*

(i) Per ogni 2-forma ω non degenere su M, esistono strutture quasi complesse compatibili con ω. Lo spazio di tali strutture è contraibile.

(ii) Per ogni struttura quasi complessa J su M, esistono 2-forme non degeneri compatibili con J; esse risultano essere di tipo $(1, 1)$ e formano uno spazio contraibile.

DEFINIZIONE 6.3 *Sia (M, J, g) una varietà quasi complessa dotata di una metrica riemanniana g. Se la struttura quasi complessa J è integrabile e la forma di Kähler della metrica è chiusa, M è detta una varietà kähleriana.*

In altre parole, una varietà kähleriana è una varietà simplettica quasi complessa, con struttura quasi complessa integrabile e compatibile con la struttura simplettica. Naturalmente è importante il fatto che J sia calibrata, e non solo dominata, da ω, perché altrimenti ω non sarebbe di tipo $(1, 1)$; invece la chiusura di ω è una proprietà globale a sé stante.

Il punto di partenza di ciò che vogliamo descrivere è il lavoro di D. Sullivan [Su 76], in cui si considerano correnti (di ordine zero) che sono "dirette" da un prefissato campo di coni nel tangente (si tratta di una condizione simile alla positività).

DEFINIZIONE 6.4 *Sia M una varietà differenziabile.*

Una struttura di cono *C su M è un campo continuo di coni compatti convessi $\{C_x\}$ nello spazio degli r-vettori tangenti $\Lambda_x^r(M)$, $x \in M$ (compatti significa che se il cono è definito dal funzionale L come $L(y) > 0$ per $y \in C$, $y \neq 0$, allora $L^{-1}(1) \cap C$ è compatto).*

Una r-forma ω è detta trasversa *alla struttura di cono C se $\forall x \in M$, $\omega_x(v) > 0$ $\forall v \in C_x$, $v \neq 0$.*

Il cono delle correnti strutturali *associato a una struttura di cono C è il cono compatto convesso generato dalle correnti di Dirac associate a elementi di C_x, $\forall x \in M$ (definite da $T_v(\varphi) = \varphi_x(v)$ se $v \in C_x$).*

Quindi le correnti strutturali sono correnti di ordine zero, e tali che se ω è una forma trasversa alla struttura di cono e $T \neq 0$, vale $T(\omega) > 0$. Il risultato che lega questi concetti è il seguente teorema.

Teorema 6.2 *(cfr. [Su 76]). Sia C una struttura di cono di r-vettori su una varietà compatta M. Allora esistono sempre o correnti strutturali chiuse non nulle, o r-forme chiuse trasverse a C. Inoltre:*

(i) Esiste una r-forma chiusa e trasversa a C se e solo se nessuna corrente strutturale chiusa è omologa a zero.

(ii) Esiste una corrente strutturale chiusa non nulla se e solo se nessuna r-forma (chiusa) trasversa a C è coomologa a zero.

La dimostrazione si basa su una applicazione del teorema di Hahn-Banach (vedi dimostrazione del teorema 6.4).

D. Sullivan studia come esempio il caso in cui i coni siano dati tramite una struttura quasi complessa J: sia cioè $C(J)_x := \{\mathrm{Span}(v, Jv), v \neq 0\}$ in $\Lambda_x^2(M)$, ovvero il cono delle rette complesse in $\Lambda_x^2(M)$. In questo caso, le 2-forme trasverse alla struttura $C(J)$ sono esattamente quelle che dominano J, e vale il seguente risultato:

Corollario 6.1 *Sia (M, J) una varietà compatta quasi complessa. M ammette una struttura simplettica ω (con ω trasversa a $C(J)$) se e solo se nessuna corrente strutturale non nulla chiusa è omologa a zero.*

Dimostrazione. Se esiste ω, e $T = dS$ è una corrente strutturale non nulla,

$$0 < T(\omega) = dS(\omega) = S(d\omega) = 0\,,$$

poiché ω è chiusa. Viceversa, dal teorema 6.2 esiste una 2-forma chiusa e trasversa a C; si riesce a dimostrare, sfruttando le proprietà del cono $C(J)$, che essa è non degenere (vedi [Su 76], III.2). □

Ora, se (M, J) è una varietà complessa, consideriamo le strutture di cono $C^p(J)$ generate dalle combinazioni positive di p-piani complessi in $\Lambda_x^{2p}(M)$; si può dimostrare che le $2p$-forme trasverse alla struttura di cono $C^p(J)$ sono esattamente quelle che hanno parte (p,p) positiva (precisamente, strettamente debolmente positiva), anche se non sono necessariamente di tipo (p,p), mentre le correnti strutturali sono esattamente le correnti positive di bidimensione (p,p). Quindi su una varietà complessa compatta M il corollario 6.1 può essere riformulato come segue:

$$\nexists\, T^{1,1} \geq 0,\ T \neq 0,\ T = dS \Leftrightarrow$$
$$\exists\, \omega \text{ 2-forma con parte } (1,1) \text{ positiva, } d\omega = 0.$$

Osservazione 6.1 La condizione sulla forma $\omega = \omega^{2,0} + \omega^{1,1} + \omega^{0,2}$, che è reale, significa:

$$\omega^{1,1} \text{ positiva },\ \partial\omega^{2,0} = 0,\ \overline{\partial}\omega^{2,0} = -\partial\omega^{1,1}\,.$$

R. Harvey e J.R. Lawson, partendo dal lavoro di D. Sullivan, caratterizzano in termini intrinseci le varietà kähleriane compatte in [HL 83]; descriviamo brevemente il loro lavoro. Una varietà kähleriana è caratterizzata, secondo la definizione 6.3, dall'avere una $(1,1)$-forma chiusa e strettamente positiva; quindi conviene lavorare nello spazio vettoriale topologico $E^{1,1}(M)_{\mathbb{R}}$ con duale topologico $E'_{1,1}(M)_{\mathbb{R}}$, dove consideriamo:

$P^1(M)$, il cono delle correnti di bidimensione $(1,1)$ positive, che corrisponde al cono delle correnti di struttura per $C(J)$, e

$B^1(M)$, lo spazio lineare delle correnti di bidimensione $(1,1)$ che sono la componente di tipo $(1,1)$ di un bordo, cioè

$$T \in B^1(M) \Leftrightarrow \exists A \in E'_3(M)_{\mathbb{R}} \text{ con } T^{1,1} = (dA)^{1,1} = \overline{\partial}A^{1,2} + \partial\overline{A^{1,2}}\,.$$

Se esiste una forma di Kähler su M, ovvero $\omega = \omega^{1,1} > 0$ e chiusa, allora $P^1(M) \cap B^1(M) = \{0\}$, poiché se $T \neq 0$ appartenesse all'intersezione, sarebbe

$$0 < T(\omega) = (\bar{\partial} A^{1,2} + \partial \overline{A^{1,2}})(\omega) = A^{1,2}(\bar{\partial}\omega) + \overline{A^{1,2}}(\partial\omega) = 0\,.$$

Viceversa, usando il teorema di Hahn-Banach, si può separare il chiuso $B^1(M)$ dal cono a base compatta $P^1(M)$ (confronta con la dimostrazione del teorema 6.4). Si ottiene così:

TEOREMA 6.3 *([HL 83], teorema 14). Sia M una varietà complessa compatta. Se non esistono correnti positive non banali in $B^1(M)$, allora M ammette una metrica kähleriana.*

Se invece del cono $C^1(J)$ si considerano genericamente i coni $C^p(J)$, $1 \leq p \leq n-1$, e analogamente $P^p(M)$ e $B^p(M)$, si possono caratterizzare in modo simile le varietà p- kähleriane.

DEFINIZIONE 6.5 *(per esempio [AB 92]). Una varietà complessa è detta p-*kähleriana *se ammette una forma di p-Kähler, ovvero una (p,p)-forma chiusa e trasversa alla struttura di cono $C^p(J)$. Una varietà $(n-1)$-kähleriana è detta anche bilanciata, mentre le varietà 1-kähleriane sono le varietà kähleriane.*

TEOREMA 6.4 *Sia M una varietà compatta, $1 \leq p \leq n-1$. M è p-kähleriana se e solo se non esiste alcuna corrente positiva non nulla di bidimensione (p,p) che sia la (p,p)-componente di un bordo.*

DIMOSTRAZIONE. Se esiste una forma di p-Kähler, come sopra si verifica che $P^p(M) \cap B^p(M) = \{0\}$. Viceversa, sia h una metrica hermitiana con forma di Kähler Ψ e sia

$$A = \{\Omega \in E^{p,p}(M)_{\mathbb{R}} : \exists c > 0 \text{ con } \Omega > c\Psi^p\} \; :$$

A è un aperto convesso non vuoto di $E^{p,p}(M)_{\mathbb{R}}$.
Sia d il differenziale esterno ristretto a $E^{p,p}(M)_{\mathbb{R}}$:

$$d : E^{p,p}(M)_{\mathbb{R}} \to \left(E^{p+1,p}(M) \oplus E^{p,p+1}(M)\right)_{\mathbb{R}} \,,$$

e sia d^* l'operatore aggiunto

$$d^* : (E'_{p+1,p}(M) \oplus E'_{p,p+1}(M))_{\mathbb{R}} \to E'_{p,p}(M)_{\mathbb{R}} .$$

Se M non è p-kähleriana, si ha $A \cap \ker d = \emptyset$, quindi dal teorema di Hahn-Banach ([Sch 70], II.3.1) si ottiene l'esistenza di $T \in E'_{p,p}(M)_{\mathbb{R}}$ con

$$T(\Omega) > 0 \ \forall \Omega \in A \quad \text{e} \quad T(\varphi) = 0 \ \forall \varphi \in \ker d .$$

Quest'ultima condizione, $T \in (\ker d)^{\perp}$, si traduce in $T \in \operatorname{Im} d^* = B^p(M)$, poiché siccome M è compatta, d risulta essere un omomorfismo topologico, e quindi $\overline{\operatorname{Im} d^*} = \operatorname{Im} d^*$. L'altra condizione si riconduce facilmente alla positività di T. □

Questo teorema permette di studiare modificazioni di varietà kähleriane, o di Moishezon, o nella classe C di Fujiki ([Fu 78]), e di dimostrare che esse sono sempre bilanciate: vedi il corollario 10.1.

La condizione $T \in B^p(M)$ citata nei teoremi 6.3 e 6.4 è anch'essa una condizione coomologica, come nel corollario 6.1; bisogna però considerare la coomologia di Aeppli invece di quella di de Rham.

DEFINIZIONE 6.6 *(vedi [No 72]). I gruppi di Aeppli di una varietà complessa M sono:*

$$\begin{aligned}
V^{p,p}(M)_{\mathbb{R}} &= \frac{\{T \in E'_{p,p}(M)_{\mathbb{R}} : i\partial\overline{\partial} T = 0\}}{\{T \in E'_{p,p}(M)_{\mathbb{R}} : T = \overline{\partial} S + \partial \overline{S}\}} = \\
&= \frac{\{\alpha \in E^{p,p}(M)_{\mathbb{R}} : i\partial\overline{\partial}\alpha = 0\}}{\{\alpha \in E^{p,p}(M)_{\mathbb{R}} : \alpha = \overline{\partial}\beta + \partial\overline{\beta}\}} , \\
\Lambda^{p,p}(M)_{\mathbb{R}} &= \frac{\{T \in E'_{p,p}(M)_{\mathbb{R}} : dT = 0\}}{\{T \in E'_{p,p}(M)_{\mathbb{R}} : T = i\partial\overline{\partial} S\}} = \\
&= \frac{\{\alpha \in E^{p,p}(M)_{\mathbb{R}} : d\alpha = 0\}}{\{\alpha \in E^{p,p}(M)_{\mathbb{R}} : \alpha = i\partial\overline{\partial}\beta\}} .
\end{aligned}$$

Quindi $V^{p,p}(M)_{\mathbb{R}}$ è dato dalle correnti pluriarmoniche quozientate con $B^p(M)$; si nota qui che le correnti in $B^p(M)$ non sono in generale chiuse, ma solo pluriarmoniche. In generale anzi, se T è pluriarmonica, dT può essere molto "irregolare": quindi in generale una corrente pluriarmonica non è una corrente normale, nè è piatta (cioè non siamo nell'ambiente delle correnti geometriche): un esempio si trova dopo il teorema 9.1.

Se decidiamo invece di voler restare in quell'ambiente, possiamo per esempio chiedere che T sia positiva, *chiusa e componente di bordo*: si può vedere [HL 83], teorema 38 o [P 86] per alcuni risultati in questo caso (si tratta in realtà di una ipotesi piuttosto restrittiva).

L'altra alternativa è quella di approfondire le proprietà delle correnti positive e pluriarmoniche (che nel locale coincidono con gli elementi di $P^p(M) \cap B^p(M)$); si vedrà per esempio nelle sezioni 8, 9, 10 che per determinati problemi l'ambiente "giusto" è quello delle correnti plurisubarmoniche e positive, o delle correnti $\mathbb{C}$-piatte.

OSSERVAZIONE 6.2 Un altro modo interessante per usare correnti positive in problemi di metriche hermitiane si può vedere in [JS 93], dove S. Ji e B. Shiffman caratterizzano le varietà compatte di Moishezon tramite $(1,1)$-correnti chiuse, strettamente positive e intere. Rimandiamo al lavoro citato per gli specifici risultati.

7 Prodotto e intersezione di correnti

Per tutto ciò che concerne questo capitolo, è interessante vedere [De 92b]. Sia M una varietà reale orientata (o complessa) compatta, di dimensione n. La dualità di Poincaré può essere espressa sia come una forma bilineare non degenere fra i gruppi di omologia o di coomologia di dimensioni complementari, cioè

$$\begin{aligned} &H_k(M) \times H_{n-k}(M) \to \mathbb{R} \quad (\{A\},\{B\}) = A \cdot B \\ &H^k(M) \times H^{n-k}(M) \to \mathbb{R} \quad (\{\alpha\},\{\beta\}) = \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

che come un isomorfismo

$$P : H_k(M) \to H^{n-k}(M) = (H_{n-k}(M))^*$$

dato da $P(A) = \eta$ se $\forall B \in H_{n-k}(M)$, $\int_B \eta = A \cdot B$.

D'altra parte, se si considera su M il complesso delle correnti (D'_*, d), si possono definire i gruppi di coomologia delle correnti; l'inclusione del sottocomplesso delle correnti lisce dà luogo ad un isomorfismo fra i gruppi di coomologia (la dimostrazione si può vedere in [GH 78], p. 382).

Quindi, sebbene in generale non si possa definire il prodotto esterno fra due correnti, anche se esse sono di ordine zero, nel caso di correnti chiuse si può definire il prodotto fra le loro classi di coomologia.

Definizione 7.1 *Se T ed S sono correnti chiuse, e α e β forme ad esse coomologhe, si definisce il prodotto cup fra le classi di coomologia come $\{T\} \cup \{S\} := \{\alpha\} \cup \{\beta\} = \{\alpha \wedge \beta\}$. In particolare, se T ed S hanno dimensione complementare, si può parlare del loro* numero di intersezione *$T.S$ che è definito da*

$$T.S := T(\beta) = S(\alpha) = \int_M \alpha \wedge \beta\,.$$

E' semplice verificare che la definizione non dipende dai rappresentanti; nel caso di sottovarietà $T = [A]$ e $S = [B]$, $T.S$ coincide con il numero di intersezione topologico $A \cdot B$ (per approfondimenti, si può vedere [Kin 74] e anche [Kin 71], 4.1, e il testo di R.N. Draper ivi citato per una teoria più generale). Questi diversi punti di vista a proposito del numero di intersezione lo rendono interessante nell'utilizzo delle correnti chiuse e positive in geometria algebrica: si possono vedere [De 93b] e [DPS 94].

Viceversa, possiamo dimostrare che in generale la classe di coomologia di una corrente chiusa e positiva su una varietà complessa non contiene rappresentanti lisci *che siano anche positivi*: basta considerare per esempio la varietà M che si ottiene scoppiando $\mathbb{P}^2$ in un punto p. In questo caso il divisore eccezionale è una curva razionale E di auto-intersezione negativa, ovvero $E.E = -1$. Se $[E]$, che è una corrente chiusa e positiva, avesse un rappresentante liscio e positivo α nella sua classe di coomologia, sarebbe

$$-1 = E.E = \int_E \alpha \geq 0\,.$$

Un fondamentale teorema di regolarizzazione di J.P. Demailly ([De 92a], Main Theorem) permette di collegare il difetto di positività di opportuni rappresentanti lisci della classe di coomologia di una $(1,1)$-corrente chiusa e positiva con i suoi numeri di Lelong. Ne riportiamo qui una versione semplificata; notiamo che l'esistenza di una forma u come richiesta è sempre garantita.

TEOREMA 7.1 *Sia M una varietà complessa compatta, e sia u la forma di Kähler di una metrica hermitiana su M, tale che, se $\pi : \mathbb{P}(T^*M) \to M$ è la proiezione canonica del proiettivizzato del cotangente di M su M e h è una opportuna metrica hermitiana sul fibrato lineare tautologico $\mathcal{O}_{TM}(1)$, la forma di curvatura di Chern soddisfi $c_1(\mathcal{O}_{TM}(1), h) + \pi^* u \geq 0$.*

Sia T una $(1,1)$-corrente chiusa e positiva su M, e γ una $(1,1)$-forma continua reale su M tale che $T \geq \gamma$.

Allora esiste una successione $\{\varphi_k\}$ di $(1,1)$-forme chiuse su M nella stessa classe di Aeppli di T, e una successione non-crescente $\{\lambda_k\}$ di funzioni continue su M tali che $\forall x \in M$, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k(x) = n(T,x)$ e $\varphi_k \geq \gamma - \lambda_k u$.

La dimostrazione di questo teorema, che va decisamente oltre gli scopi di questo scritto, usa pesantemente il fatto che T sia chiusa e positiva e di bigrado $(1,1)$, perché l'analisi è fatta sulla funzione plurisubarmonica che è un potenziale locale di T. Per alcune applicazioni della teoria dell'intersezione di correnti, si può vedere [JS 93].

ESEMPIO. Se $n(T,z) = 0$ (escluso al più per un insieme numerabile di z), allora se $S \geq 0$, vale $T.S \geq 0$ (basta scegliere $\gamma = 0$): confronta con la situazione differente descritta nell'esempio dopo la definizione 7.1.

Notiamo che in generale su una varietà complessa compatta sono interessanti le forme bilineari non degeneri

$$H^{p,q}(M) \times H^{n-p,n-q}(M) \to \mathbb{C} \quad \text{e} \quad V^{p,p}(M)_{\mathbb{R}} \times \Lambda^{n-p,n-p}(M)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

date da $(\{\alpha\},\{\beta\}) = \int_M \alpha \wedge \beta$ (prendendo rappresentanti lisci delle classi). In particolare, se T è una (p,p)-componente di bordo e S è una corrente chiusa di bidimensione complementare, $T.S = 0$. Per l'uso di queste tecniche in problemi di metriche kähleriane, si può vedere [AB 99]: diamo qui solo un esempio.

PROPOSIZIONE 7.1 *([AB 99], proposizione 4.6). Sia M una varietà complessa compatta, Y una sua ipersuperficie, e T una corrente positiva e pluriarmonica di bidimensione $(1,1)$ su M. Se $\chi_Y T = 0$, allora $T.Y \geq 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo applicare il teorema 7.1, con $\gamma = 0$, alla corrente $[Y]$. Allora

$$T.[Y] = T(\varphi_k) \geq -T(\lambda_k u)\,.$$

Ci basta provare che $\lim_{k\to\infty} T(\lambda_k u) = 0$. Sia u una forma come nel teorema 7.1 e sia μ la misura positiva su M data da $\mu(A) = T(\chi_A u)$. Siccome $\lim_{k\to\infty} \lambda_k(z) = n([Y], z) = \chi_Y(z)$ per q.o. $z \in Y$, e $0 \leq \lambda_k \leq \lambda_0$, si ha

$$\lim_{k\to\infty} T(\lambda_k u) = \lim_{k\to\infty} \int_M \lambda_k T \wedge u = \chi_Y T(u) = 0\,.$$

□

Un altro tipo di approccio all'argomento del prodotto è il seguente: *trovare condizioni per cui abbia senso il prodotto esterno $S \wedge T$* (e naturalmente rispetti la coomologia, ovvero se S e T sono chiuse, $\{S \wedge T\} = \{S\} \cup \{T\}$).

Se una delle due correnti è liscia, è ovvio definire

$$(\alpha \wedge T)(\varphi) = T(\alpha \wedge \varphi)$$

e questo ha senso anche se, per esempio, α è a coefficienti continui e T è di ordine zero.

Nell'ottica delle correnti più usate, le chiuse e positive, il caso trattato per primo è stato quello in cui una delle due correnti è espressa con un potenziale plurisubarmonico. Sia quindi u una funzione plurisubarmonica su M e T una corrente di bidimensione (p, p), positiva e chiusa: vorremmo definire il prodotto $i\partial\overline{\partial}u \wedge T$. A priori questo non è possibile, in quanto si tratta di correnti a coefficienti misure: tuttavia se uT è di massa localmente finita, si può procedere come segue. Il caso più semplice è quello in cui u è localmente limitata: se $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(M)$, $uT \in D'_{p,p}(M)$ poiché T è di ordine zero, e quindi possiamo definire (seguendo [BT 82])

$$i\partial\overline{\partial}u \wedge T := i\partial\overline{\partial}(uT)\,.$$

PROPOSIZIONE 7.2 *$i\partial\overline{\partial}u \wedge T$ è ancora una corrente positiva e chiusa.*

DIMOSTRAZIONE. La chiusura è ovvia; per provare la positività, in carta locale possiamo regolarizzare u per convoluzione, ottenendo una successione decrescente $\{u_n\}$ di funzioni plurisubarmoniche lisce che convergono a u. Allora $u_nT \to uT$, e inoltre $i\partial\overline{\partial}(u_nT) = i\partial\overline{\partial}u_n \wedge T \geq 0$, perciò $i\partial\overline{\partial}(u_nT) \to i\partial\overline{\partial}(uT) \geq 0$. □

In generale, possiamo definire per induzione, se $u_1, \dots, u_q \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(M)$ e T è chiusa e positiva,

$$i\partial\overline{\partial}u_1 \wedge \dots \wedge i\partial\overline{\partial}u_q \wedge T := i\partial\overline{\partial}(u_1 i\partial\overline{\partial}u_2 \wedge \dots \wedge i\partial\overline{\partial}u_q \wedge T),$$

ottenendo ancora una corrente chiusa e positiva.

Il secondo caso che consideriamo prende in esame il luogo dove u non è limitata.

PROPOSIZIONE 7.3 *(vedi [De 93a], proposizione 2.1). Sia u una funzione plurisubarmonica su M, $L(u) = \{x \in M : u$ non è limitata in ogni intorno di $x\}$. Sia T una corrente di bidimensione (p, p) $(p \geq 1)$ chiusa e positiva, e supponiamo che M abbia un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di aperti di Stein, $U_\alpha \subset\subset M$, i cui bordi bU_α non intersechino $L(u) \cap \operatorname{supp} T$. Allora uT ha massa localmente finita su M.*

OSSERVAZIONE 7.1 Nella definizione 2.2, $T \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^p$ è una misura ben definita su M. Infatti, scelto R come nella definizione, $L(\varphi) \subset B(R)$, ma $B(R) \cap \operatorname{supp} T$ è a chiusura compatta in M, e quindi è possibile trovare un ricoprimento di aperti di Stein i cui bordi non lo intersecano. Questo assicura che φT è ben definita su M, quindi posso definire $i\partial\overline{\partial}\varphi \wedge T := i\partial\overline{\partial}(\varphi T)$; procedendo per induzione, $T \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^p := i\partial\overline{\partial}(\varphi T \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^{p-1})$.

ESEMPIO. Sia $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ olomorfa, con $F = (F_1, \dots, F_m)$, e supponiamo che i luoghi di zero di $F_1, \dots, F_m$ si intersechino in un insieme discreto di punti. Allora se $u = \log|F|$, $L(u)$ è un insieme discreto e sono soddisfatte le ipotesi della proposizione 7.3. Quindi, per ogni T positiva e chiusa, uT, che a priori è ben definita su $\mathbb{C}^n - L(u)$, si estende a $\mathbb{C}^n$.

Consideriamo infine una ipotesi sulla misura di Hausdorff di $L(u)$ (il caso di q funzioni plurisubarmoniche è trattato nel teorema 2.5 di [De 93a]).

TEOREMA 7.2 *Sia u una funzione plurisubarmonica su M e T una corrente di bidimensione (p,p) $(p \geq 1)$ chiusa e positiva su M. Se $\mathcal{H}_{2p-1}(L(u) \cap \operatorname{supp} T) = 0$, allora le correnti uT e $i\partial\overline{\partial}u \wedge T$ sono ben definite e hanno massa localmente finita in M.*

Il teorema 7.2 si può applicare per esempio quando $L(u) \cap \operatorname{supp} T$ è contenuto in un sottoinsieme analitico di dimensione al più $p-1$. E' interessante confrontare questo caso con i teoremi di estensione per le correnti plurisubarmoniche, per esempio il teorema 8.3, poiché dire che uT ha massa localmente finita in M significa poter estendere uT attraverso $L(u)$.

ESEMPIO. Sia M una varietà complessa compatta di dimensione tre, kähleriana fuori di una sua curva C. Sia S una sua forma di Kähler su $M - C$, e sia T una $(1,1)$-corrente chiusa e positiva. Allora il prodotto $S \wedge T$ è ben definito su M. Infatti localmente (in U) $S = i\partial\overline{\partial}u$; uT, che è ben definita su $U - C$, si estende a tutto U poiché $\mathcal{H}_3(C \cap \operatorname{supp} T) = 0$.

Per il prodotto di correnti che abbiamo appena definito (sotto determinate ipotesi), si ha:

PROPOSIZIONE 7.4 *(corollari 5.10 e 9.3 di [De 93a]). Se $i\partial\overline{\partial}u_1 \wedge \ldots \wedge i\partial\overline{\partial}u_q \wedge T$ è ben definita, si ha $\forall x \in M$:*

(i) (numeri di Lelong) $n(i\partial\overline{\partial}u_1 \wedge \ldots \wedge i\partial\overline{\partial}u_q \wedge T, x) \geq n(i\partial\overline{\partial}u_1, x) \cdot \cdots \cdot n(i\partial\overline{\partial}u_q, x) \cdot n(T, x)$

(ii) (classi di coomologia) $\{i\partial\overline{\partial}u_1 \wedge \ldots \wedge i\partial\overline{\partial}u_q \wedge T\} = \{i\partial\overline{\partial}u_1\} \cup \cdots \cup \{i\partial\overline{\partial}u_q\} \cup \{T\}$.

Questo tipo di argomenti permette di stimare "l'eccesso di autointersezione" per divisori (o più in generale per correnti chiuse e positive) su una varietà compatta kähleriana (vedere [De 93a, De 92b]).

Siano ora S una $(1,1)$-corrente chiusa e positiva e T una corrente *pluriarmonica* e positiva; per definire il loro prodotto non possiamo procedere come sopra, e cioè porre localmente $i\partial\overline{\partial}u \wedge T := i\partial\overline{\partial}(uT)$, perché compaiono i termini legati a ∂T e $\overline{\partial}T$, anche nel caso liscio e se T è una componente di bordo. Una prima soluzione parziale del problema è data in [Bas 98], proposizione IV, che riportiamo (confronta con l'esempio dopo il teorema 7.2).

PROPOSIZIONE 7.5 *Sia M una varietà complessa compatta di dimensione* 3 *contenente una curva liscia C. Siano S e T $(1,1)$-correnti positive su M, S chiusa e liscia su $M - C$, T pluriarmonica. Allora è ben definita una $(2,2)$-corrente $S \wedge T$ positiva e pluriarmonica, tale che $S \wedge T$ coincide su $M - C$ con la definizione classica, e la sua classe (nel gruppo di Aeppli) $\{S \wedge T\} = \{S\} \cup \{T\}$.*

8 Correnti plurisubarmoniche: problemi di estensione e di supporto

Iniziamo col citare il risultato classico di H. Grauert e R. Remmert per l'estensione di funzioni plurisubarmoniche su spazi analitici (per le definizioni e il contesto, confronta [GR 56]).

TEOREMA 8.1 *Se Y è un sottoinsieme analitico di codimensione* ≥ 1 *in uno spazio analitico X, e u è una funzione plurisubarmonica su $X - Y$, localmente superiormente limitata in X, allora u si estende in modo unico a una funzione plurisubarmonica su Y. Se* $\operatorname{codim} Y \geq 2$, *ogni funzione plurisubarmonica u su $X - Y$ si estende a un'unica funzione plurisubarmonica su X.*

Possiamo leggere il teorema di H. Grauert e R. Remmert come un risultato di estensione di correnti plurisubarmoniche di bidimensione (n,n). Esso ha trovato una generalizzazione nei risultati che seguono, di cui non daremo dimostrazioni, vista la complessità delle stesse. Ricordiamo innanzitutto la definizione di corrente pluripositiva ([Sib 85]).

DEFINIZIONE 8.1 *Una corrente T di bidimensione (p,p) è detta* pluripositiva *se è localmente normale, positiva o negativa, e $i\partial\overline{\partial}T \geq 0$.*

Notiamo che una funzione plurisubarmonica positiva o negativa è una corrente pluripositiva, come anche lo è uT, se T è una corrente chiusa e positiva e u è una funzione plurisubarmonica e positiva. Correnti pluripositive sono usate da S.M. Ivashkovich in [I 92], e chiamate *pluridefinite*.

Teorema 8.2 *([Sib 85], teorema 2.4). Sia A un chiuso pluripolare completo di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, e sia T una corrente pluripositiva su $U - A$. Se T, dT e $i\partial\overline{\partial}T$ hanno massa localmente finita attraverso A, allora:*

(i) $dT^\circ = (dT)^\circ$

(ii) $i\partial\overline{\partial}T^\circ - (i\partial\overline{\partial}T)^\circ = S$,

dove S è una corrente chiusa, supportata su A, di segno opposto a quello di T.

La dimostrazione di questo risultato si muove sulla linea classica, poiché le correnti pluripositive sono localmente normali e quindi localmente piatte (paragonare con i teoremi 4.9 e 4.10). In generale invece le correnti pluriarmoniche e plurisubarmoniche non sono localmente piatte, quindi i risultati che ora citeremo richiedono una diversa linea di dimostrazione. Si noti inoltre in essi l'assenza (rispetto al teorema 8.2) di ipotesi sulla massa attraverso A delle varie correnti coinvolte.

Teorema 8.3 *([AB 93b]) Sia Y un sottoinsieme analitico di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, e sia T una corrente plurisubarmonica di ordine zero e di bidimensione (p,p) su $U - Y$, con $p > \dim Y$.*

(i) Se $\dim Y < p-1$, e T è positiva o negativa, allora sia T che $i\partial\overline{\partial}T$ hanno massa localmente finita attraverso Y, e vale $i\partial\overline{\partial}T^\circ = (i\partial\overline{\partial}T)^\circ$, quindi T° è plurisubarmonica.

(ii) Se $\dim Y = p-1$ e $T \leq 0$, allora esiste T°, ed essa è plurisubarmonica. Più precisamente, T e $i\partial\overline{\partial}T$ hanno massa localmente finita attraverso Y, e vale

$$i\partial\overline{\partial}T^\circ - (i\partial\overline{\partial}T)^\circ = \sum c_j[Y_j],$$

dove $c_j \geq 0$ e $\{Y_j\}$ sono le componenti irriducibili di dimensione $p-1$ di Y.

(iii) Se $\dim Y = p-1$, $T \geq 0$, e $i\partial\overline{\partial}T$ ha massa localmente finita attraverso Y, allora T si estende e vale

$$i\partial\overline{\partial}T^\circ - (i\partial\overline{\partial}T)^\circ = \sum c_j[Y_j],$$

dove $c_j \leq 0$ e $\{Y_j\}$ sono le componenti irriducibili di dimensione $p-1$ di Y.

OSSERVAZIONE 8.1 Nel teorema 8.1 l'ipotesi $\dim Y < p = n$ è sempre vera, e l'ipotesi "localmente superiormente limitata in X" corrisponde a chiedere $T \leq 0$ (infatti questo è equivalente a chiedere $T \leq \varphi$, per una forma φ; anche nel caso generale $p < n$ questa ipotesi può essere indebolita se si chiede $\dim Y < p-1$). Notiamo inoltre che nel caso generale delle correnti, bisogna anche controllare l'esistenza dell'estensione di $S := i\partial\overline{\partial}T$: la corrente S è chiusa e positiva, ma l'insieme attraverso cui la vogliamo estendere non è "piccolo" rispetto alla sua bidimensione, e quindi non si può semplicemente applicare il teorema 4.2. E anche, supposto che esista T°, non è detto che $i\partial\overline{\partial}T^\circ$ sia di ordine zero, per cui non si applicano i risultati classici.

ESEMPIO. In $\mathbb{C}$, consideriamo $T = 1/\pi z + 1/\pi\overline{z}$: essa è una corrente liscia e pluriarmonica in $\mathbb{C} - \{0\}$; la sua estensione T° però non è plurisubarmonica, né $i\partial\overline{\partial}T^\circ$ è di ordine zero, infatti

$$i\partial\overline{\partial}T^\circ = i(\partial_z + \partial_{\overline{z}})\delta_0 dz \wedge d\overline{z}\,.$$

Per quanto riguarda l'unicità dell'estensione plurisubarmonica, vale il seguente risultato.

TEOREMA 8.4 *([AB 93b]) Sia Y un sottoinsieme analitico di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, e sia T una corrente plurisubarmonica di ordine zero e di bidimensione (p,p) su $U - Y$, con $p > \dim Y$.*

(i) Unicità forte: T° è l'unica (possibile) estensione plurisubarmonica di ordine zero.

(ii) Unicità debole: se $T \leq 0$ o $T \geq 0$, ed esiste un'estensione plurisubarmonica R, allora esiste anche T° e $i\partial\overline{\partial}T^\circ = i\partial\overline{\partial}R \geq 0$.

OSSERVAZIONE 8.2 Confrontando col teorema 8.1, notiamo che per $p < n$ perdiamo l'unicità dell'estensione, in quanto ora possono esistere estensioni non di ordine zero, a differenza del caso delle funzioni plurisubarmoniche (lì l'estensione, essendo plurisubarmonica, è in L^1_{loc}).

L'esempio seguente mostra che, in generale, l'estensione di una corrente pluriarmonica non è più pluriarmonica.

ESEMPIO. Sia $Y := \{z_n = 0\}$ in $U := B(0,1) \subset \mathbb{C}^n$, e sia $u = (1/\pi)\log|z_n|$; u è una funzione pluriarmonica ≤ 0 su $U - Y$, e si estende a U come $u^\circ = (1/\pi)\log|z_n|$. Ma per la formula di Cauchy in $\mathbb{C}^n$ vale:

$$i\partial\overline{\partial}u^\circ = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log|z_n|^2 = \frac{1}{2\pi i}\overline{\partial}\left(\frac{dz_n}{z_n}\right) = [\{z_n = 0\}] = [Y],$$

mentre $(i\partial\overline{\partial}u)^\circ = 0$; quindi u° non è più pluriarmonica, ma il suo $i\partial\overline{\partial}$ comprende una corrente *positiva* S supportata su Y : $i\partial\overline{\partial}u^\circ = (i\partial\overline{\partial}u)^\circ + S$.

In questo esempio si può notare anche come il segno della "corrente residua" su Y, $S = i\partial\overline{\partial}u^\circ - (i\partial\overline{\partial}u)^\circ$, sia l'opposto del segno della corrente di partenza; questo fatto vale più in generale, anche se la corrente T non è plurisubarmonica, purché esista il residuo, come prova il seguente teorema.

TEOREMA 8.5 *([Bas 94], teorema 3.5). Sia $i : Y \to U$ una sottovarietà liscia di U, e consideriamo una corrente $T^{p,p}$ su $U - Y$, tale che sia T che $i\partial\overline{\partial}T$ abbiano massa localmente finita attraverso Y. Se T è positiva (negativa), e $i\partial\overline{\partial}T^\circ - (i\partial\overline{\partial}T)^\circ$ è una corrente su Y, ovvero esiste $S \in D'_{p-1,p-1}(Y)$ tale che $i_*S = i\partial\overline{\partial}T^\circ - (i\partial\overline{\partial}T)^\circ$, allora S è negativa (positiva).*

Passiamo ora a risultati di supporto nel caso pluriarmonico: per il caso di correnti plurisubarmoniche, si veda il prossimo capitolo.

TEOREMA 8.6 *([AB 92] teoremi 1.1, 1.2 e 1.5). Sia $T \geq 0$ una corrente di bidimensione (p,p) su un aperto U di $\mathbb{C}^n$, tale che $i\partial\overline{\partial}T = 0$, cioé pluriarmonica.*

(a) Se $\mathcal{H}_{2p}(\operatorname{supp} T) = 0$, allora $T = 0$.

(b) Se $\operatorname{supp} T$ è contenuto in una sottovarietà liscia V di dimensione q, allora T induce una corrente positiva e pluriarmonica su V, e se $p = q$, esiste una funzione pluriarmonica non negativa $h : V \to \mathbb{R}$ tale che $T = h[V]$ (il caso $p = 1$ è in [HL 83], lemma 32).

(c) *Se* $\operatorname{supp} T \subset Y$*, dove* Y *è un sottoinsieme analitico compatto, con* $\{Y_j\}$ *le sue componenti irriducibili di dimensione* p*, allora esistono delle costanti* $c_j \geq 0$ *tali che* $T - \sum c_j[Y_j]$ *è una corrente positiva e pluriarmonica, supportata sull'unione delle componenti irriducibili di* Y *di dimensione maggiore di* p *(quindi se* $dim Y = p$, $T - \sum c_j[Y_j] = 0$*, cioè* T *risulta essere un ciclo analitico).*

DIMOSTRAZIONE. Per (a) si utilizzano delle proiezioni complesse π, di modo che ogni $\pi_* T$ diventi una distribuzione pluriarmonica, e quindi una funzione liscia; ma essendo zero la misura del suo supporto, essa è nulla. Si usa poi la positività per poter stimare T solo con proiezioni complesse $\pi_* T$, e quindi sui coefficienti diagonali (confronta con il corrispondente caso chiuso nel teorema 4.2). Per (b), si utilizza la struttura locale (per questo serve V liscia) e dell'algebra multilineare. Per la parte (c), si ragione per induzione, dato che Sing$Y$ ha dimensione minore di quella di Y. □

OSSERVAZIONE 8.3 La parte (a) è generalizzata a correnti pluriarmoniche *di ordine zero* supportate su un insieme analitico di dimensione minore di p in [AB 93a], teorema 2.1. Lì sono studiate in particolare $(1,1)$-correnti pluriarmoniche di ordine zero supportate sul divisore eccezionale di una modificazione, e teoremi di estensione di correnti attraverso il divisore eccezionale (vedi sezione 10). L'ipotesi che la corrente sia di ordine zero non può essere tolta, infatti per esempio su $\mathbb{C}^2$ con coordinate $z = (z_1, z_2)$,

$$T = i(\partial(\delta(z)d\overline{z}_1) - \overline{\partial}(\delta(z)dz_1))$$

verifica $\operatorname{supp} T = \{0\}$, $i\partial\overline{\partial}T = 0$, ma $T \neq 0$.

9 Correnti $\mathbb{C}$-piatte

Come abbiamo più volte notato, lo studio delle proprietà delle correnti plurisubarmoniche non può avvalersi in generale della teoria delle correnti geometriche di Federer, poiché le correnti plurisubarmoniche non sono in generale piatte. Risulta quindi utile studiare una classe più ampia di correnti geometriche, quella delle correnti $\mathbb{C}$-piatte, che è meglio adattata al caso complesso.

DEFINIZIONE 9.1 *Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$. Una corrente $T \in E'_r(U)$ è detta* $\mathbb{C}$-piatta *se è della forma $T = F + \partial G + \overline{\partial} H$, dove F, G e H sono forme a coefficienti funzioni L^1_{loc}. Indicheremo con $F^*_{\mathbb{C}}(U)$ lo spazio delle correnti $\mathbb{C}$-piatte su U.*

La definizione e lo studio delle proprietà delle correnti $\mathbb{C}$-piatte si trovano nel primo capitolo di [Bas 94], a cui rimandiamo; qui di seguito riportiamo solo alcuni fatti di cui faremo uso.

TEOREMA 9.1 *([Bas 94], teorema 1.13). Sia $T^{p,p}$ una corrente $\mathbb{C}$-piatta su U aperto di $\mathbb{C}^n$. Se $\mathcal{H}_{2p}(\operatorname{supp} T) = 0$, allora $T = 0$.*

OSSERVAZIONE 9.1 (1) Se T e $i\partial\overline{\partial}T$ sono di ordine zero (in particolare se T è positiva, o negativa, e plurisubarmonica), allora T è $\mathbb{C}$-piatta.

(2) Se T è $\mathbb{C}$-piatta e A è un chiuso, allora $\chi_A T$ è ancora $\mathbb{C}$-piatta.

(3) Se T è $\mathbb{C}$-piatta e $f : U \to U'$ è una mappa olomorfa e propria sul supporto di T, allora $f_* T$ è $\mathbb{C}$-piatta.

(4) Ogni corrente piatta è ovviamente $\mathbb{C}$-piatta, ma non vale il viceversa: vedi l'esempio seguente.

ESEMPIO. In $\mathbb{C}^2$, sia

$$R = \frac{i}{2}\delta(z_2)(dz_1 \wedge d\overline{z}_2 + dz_2 \wedge d\overline{z}_1);$$

R è una $(1,1)$-corrente reale di ordine zero, pluriarmonica, e quindi $\mathbb{C}$-piatta, dall'osservazione (1), ma non è localmente piatta, poiché ogni $(1,1)$-corrente piatta supportata su $\{z_2 = 0\}$ deve essere un multiplo del piano $\{z_2 = 0\}$, dal teorema 4.1.

Sia Y un sottoinsieme analitico o una sottovarietà (di M varietà, o di U aperto di $\mathbb{C}^n$). Se T è una corrente con $\operatorname{supp} T \subset Y$, si può concludere che T è una corrente "di Y"? In generale ovviamente no; nel caso di correnti localmente piatte, si hanno i seguenti risultati (vedi [Kin 71], teorema 2.18 e corollari)

TEOREMA 9.2 *Se M è una varietà reale, e $i : V \to M$ è una sua sottovarietà liscia immersa (embedded), vale $i_* \mathcal{F}_r^{\mathrm{loc}}(V) = \{T \in \mathcal{F}_r^{\mathrm{loc}}(M) : \operatorname{supp} T \subset V\}$. Se Y è una sottovarietà di una varietà complessa M, e T è una corrente localmente piatta e di ordine zero, con $\operatorname{supp} T \subset Y$, allora $T \in \mathcal{F}_r^{\mathrm{loc}}(Y)$.*

Nel caso delle correnti $\mathbb{C}$-piatte, per avere un risultato analogo serve la positività (vedi il controesempio precedente), quindi il teorema 9.3 si applica per esempio nel caso di correnti positive e plurisubarmoniche. Per le correnti di ordine zero e pluriarmoniche si ha come caso particolare il teorema 2.3 di [AB 93a].

TEOREMA 9.3 *Se Y è un sottoinsieme analitico di U aperto di $\mathbb{C}^n$, e T è una corrente su U $\mathbb{C}$-piatta e positiva, con $\operatorname{supp} T \subset Y$, allora esiste $S \in \mathcal{F}^{\mathrm{loc}}_{p,p\,\mathbb{C}}(Y)$ con $i_* S = T$.*

La dimostrazione è piuttosto complicata, si trova in ([Bas 94], teorema 1.24).

La teoria delle correnti $\mathbb{C}$-piatte, insieme al teorema 8.5, permette di ottenere anche alcuni importanti risultati di cut-off per correnti plurisubarmoniche.

TEOREMA 9.4 *Sia $T^{p,p}$ una corrente positiva e plurisubarmonica su U, sia Y un sottoinsieme analitico di U.*

(i) Se $\dim Y < p$, allora $\chi_Y T = 0$, e anche $\chi_Y(i\partial\overline{\partial}T) = 0$.

(ii) Se Y ha dimensione pura p, allora $\chi_Y T = f[Y]$ per una certa funzione $f \geq 0$ e debolmente plurisubarmonica su Y.

(iii) Se $\dim Y > p$, e Y è liscio, $\chi_Y T$ è una corrente positiva e plurisubarmonica su Y.

OSSERVAZIONE 9.2 La dimostrazione di (i) è il precedente teorema 9.1 e il lemma 4.8 in [Bas 94]; quella di (ii) è nel teorema 4.10 di [Bas 94] e (iii) è il teorema 2.1 di [AB 99], che usa i teoremi 9.3 e 8.5. Questi risultati sono da confrontare con i teoremi 4.1 e 4.2; in particolare nel caso compatto le funzioni plurisubarmoniche sono costanti, quindi se nel caso (ii) del teorema 9.4 Y è compatto, $\chi_Y T = \sum c_j [Y_j]$ diventa una corrente chiusa, e quindi anche piatta.

ESEMPIO. Sia $T^{p,p}$ una corrente positiva e $\mathbb{C}$-piatta su U, e Y un sottoinsieme analitico di dimensione pura p di U. Allora $T|_{U-Y}$ è $\mathbb{C}$-piatta, e $T|_{U-Y} \leq T$, dunque ha massa localmente finita attraverso Y, perciò

$$T = (T|_{U-Y})^\circ + \chi_Y T\,.$$

Ma $\chi_Y T$ è $\mathbb{C}$-piatta e positiva, dunque per il teorema 9.3 esiste una funzione f in $L^1_{\mathrm{loc}}(Y)$ tale che $\chi_Y T = f[Y]$. Perciò

$$T = (T|_{U-Y})^\circ + f[Y]\,.$$

Nel caso in cui T sia plurisubarmonica, f risulta plurisubarmonica.

10 Correnti e modificazioni; numeri di Lelong di correnti plurisubarmoniche

Ricordiamo le considerazioni fatte nella proposizione 5.3 sul pull-back di $(1,1)$-correnti chiuse e positive, usando i loro potenziali locali. Nell'ottica del legame con le metriche hermitiane, è necessario studiare una sorta di pull-back per $(1,1)$-correnti pluriarmoniche (quindi non descrivibili con potenziali locali). Questo è possibile nel caso delle modificazioni (vedi Proposizione 5.4).

TEOREMA 10.1 *([AB 95] teorema 3 e [AB 96a] teorema 5.6). Sia $f : \tilde{M} \to M$ una modificazione propria fra varietà complesse. Sia T una $(1,1)$-corrente positiva e pluriarmonica su M; allora esiste un'unica $(1,1)$-corrente positiva e pluriarmonica f^*T su $\tilde{M}$ tale che*

(i) $f_*(f^*T) = T$

(ii) se α è una $(1,1)$-forma chiusa tale che $\langle T\rangle = \langle \alpha\rangle$ in $V^{1,1}(M)_{\mathbb{R}}$, allora $\langle f^*T\rangle = \langle f^*\alpha\rangle$ in $V^{1,1}(\tilde{M})_{\mathbb{R}}$.

Alcune note sulla *dimostrazione.* Siccome f induce un biolomorfismo tra $\tilde{M} - E$ e $M - Y$, la corrente cercata dovrà estendere $S := ((f|^{-1}_{\tilde{M}-E})_*(T|_{M-Y}))$ da $\tilde{M} - E$ a tutto M. Quindi il primo passo è provare che S ha massa localmente finita attraverso E. Questo è un problema locale, e quindi può essere trattato in coordinate, partendo da un blow-up di centro liscio, poiché f è localmente dominata da uno scoppiamento di centro liscio.

Sia dunque U un aperto coordinato, dove T viene liscificata per convoluzione, ottenendo una famiglia $\{T_\varepsilon\}$ di $(1,1)$-correnti lisce, positive e plurisubarmoniche che convergono a T in $V \subset\subset U$. Si prova usando stime di massa (riportate in letteratura per correnti chiuse e opportunamente modificate) che in $W \subset\subset V$, $\sup ||f^*T_\varepsilon|_{f^{-1}(W)}|| < \infty$, e quindi una sottosuccessione di $\{f^*T_\varepsilon\}$ converge in $f^{-1}(W)$ a una corrente f^*T. Si dimostra poi che la costruzione si può globalizzare, ottenendo f^*T su $\tilde{M}$, e che si può passare dal caso del blow-up di centro liscio al caso di una generica modificazione.

Bisogna notare che, in generale, la corrente richiesta *non è l'estensione banale* S°, poiché essa non soddisfa la richiesta coomologica (confronta Proposizione 5.4 (b)).

Il teorema precedente permette di dimostrare in particolare l'invarianza della classe delle varietà bilanciate per modificazioni:

COROLLARIO 10.1 *(([AB 95] teorema 7 e [AB 96a] corollario 5.7). Sia* $f : \tilde{M} \to M$ *una modificazione fra varietà complesse compatte. Allora* $\tilde{M}$ *è bilanciata se e solo se* M *è bilanciata.*

DIMOSTRAZIONE. Usiamo la caratterizzazione del teorema 6.4. Supponiamo che M sia bilanciata, e sia $\tilde{R}$ una $(1,1)$-corrente positiva e componente di bordo su $\tilde{M}$. Allora $R := f_*\tilde{R}$ è una $(1,1)$-corrente positiva e componente di bordo su M, e dunque è nulla. Dato che $M - Y$ è biolomorfo a $\tilde{M} - E$, $\tilde{R}$ deve essere supportata su E, e quindi dal teorema di supporto 8.6, $\tilde{R} = \sum c_j[E_j]$, $c_j \geq 0$. Ma le componenti irriducibili del divisore eccezionale sono generatori della coomologia, quindi dal fatto che R è componente di bordo si deduce $c_j = 0$ $\forall j$, cioè $\tilde{R} = 0$.

Viceversa, sia T una $(1,1)$-corrente positiva e componente di bordo su M, e sia f^*T la corrente descritta nel teorema 10.1. Allora $f^*T \in f^*\langle T\rangle = 0$, quindi $f^*T = 0$, poiché M è bilanciata. Perciò $T = f_*f^*T = 0$. $\square$

In [Sk 82], H. Skoda osserva che se $T^{p,p} \geq 0$ è tale che la variazione totale $|i\partial\overline{\partial}T| = i\partial\overline{\partial}T \wedge \beta^{p-1}/(p-1)!$ è una misura positiva (in particolare quindi se T è plurisubarmonica o pluripositiva - vedi la Definizione 8.1), allora $n(T,a,r)$ è una funzione crescente di r, e quindi il numero di Lelong di una tale corrente esiste ed è non negativo. Anche per queste correnti si possono quindi considerare gli insiemi $E_c(T)$, che sono ancora dei chiusi con $\mathcal{H}_{2p}(E_c(T) \cap K) < \infty$ per ogni compatto K di Ω (infatti la dimostrazione per le correnti chiuse può essere adattata a questo caso). Non si conosce invece una buona caratterizzazione analitica di questi insiemi, paragonabile al teorema 2.2.

Per quanto riguarda le correnti positive e plurisubarmoniche, una estensione del numero di Lelong proposta in [AB 96b] è la seguente, di cui diamo qui solo un cenno:

Definizione 10.1 *Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$ contenente l'origine, L un suo sottospazio lineare di dimensione m, B una palla aperta in L, con $B \subset\subset U$, $T^{p,p}$ una corrente positiva e plurisubarmonica su U, con $p \geq m$. Definiamo il numero di Lelong di T lungo L in B come*

$$n(T,L,B) := \lim_{r\to 0} \frac{1}{(\pi r^2)^{p-m}} \int_{\{|z|<r\}\times B} T \wedge \left(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z|^2\right)^{p-m} \wedge \left(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|t|^2\right)^m$$

($t = t_1, \ldots, t_m$ sono le coordinate su L, $z = z_1, \ldots, z_{n-m}$ sono le rimanenti).

Si dimostra che questo limite esiste, in quanto la funzione di cui si fa il limite è non decrescente, e per $m = 0$ coincide con $n(T,0)$, il numero di Lelong classico. Si dimostra inoltre che $n(T,L,B)$ è rappresentato da una funzione plurisubarmonica, nel senso che esiste un intorno X di zero in L, e una funzione plurisubarmonica $f : X \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, tale che per ogni palla aperta B in L, $B \subset\subset X$, vale

$$n(T,L,B) = \int_B f(t) \left(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|t|^2\right)^m .$$

Le dimostrazioni in generale sono molto tecniche: un caso particolarmente semplice è quello in cui $p = m$, in cui cioè la bidimensione della corrente è uguale alla dimensione di L, poiché si possono usare i teoremi di cut-off (teorema 9.4).

Infatti in questo caso sia $S := T|_{U-L}$: è una corrente positiva e $\mathbb{C}$-piatta che ha massa localmente finita attraverso L, poiché $S \le T$. Quindi ammette l'estensione banale, e vale

$$T = \chi_L T + S^\circ .$$

Dal teorema 9.3 otteniamo che esiste una funzione f in $L^1_{\mathrm{loc}}(Y)$ tale che $\chi_L T = f[L]$, anzi se T è plurisubarmonica, f è non negativa e plurisubarmonica. Quindi $T = f[L] + S^\circ$, e per ogni B in L,

$$\int_{\{|z|<r\}\times B} T \wedge \left(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|t|^2\right)^m = \int_B f(t) + \int_{\{|z|<r\}\times B} S^\circ \wedge \left(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|t|^2\right)^m .$$

Ma l'ultimo addendo è maggiorato dalla massa di S° su $\{|z| < r\} \times B$, che tende alla massa di S° su B, la quale è nulla per definizione.

Queste tecniche consentono di dimostrare che il numero di Lelong classico per correnti positive e plurisubarmoniche non dipende dalle coordinate, e di estendere al caso non chiuso il ruolo dei numeri di Lelong classici nei problemi di cut-off su sottovarietà.

Teorema 10.2 *([AB 96b], teorema III e proposizione 5.3) Sia Y una sottovarietà di U aperto di $\mathbb{C}^n$, sia $T \ge 0$ e plurisubarmonica. Allora $n(T,z)$ ristretta a Y è una funzione debolmente plurisubarmonica su Y, e se la dimensione di Y è la stessa della corrente T, $\chi_Y T = n(T,z)[Y]$.*

Questo teorema è da paragonare con il risultato di Y.T. Siu per le correnti chiuse, vedi teorema 4.2(b), e con il teorema 9.4.

Il numero di Lelong lungo L ha anche un'interpretazione geometrica, se pensiamo di scoppiare U lungo L. In particolare, sia T una $(1,1)$-corrente positiva e pluriarmonica su U, e sia $\pi : \tilde{U} \to U$ il blow-up di U lungo L. In questo caso $\pi^* T$ è una corrente ben definita su $\tilde{U}$, e risulta

$$|\pi^* T|(\pi^{-1}(B)) = n(T, L, B) .$$

Per il caso di una corrente *plurisubarmonica*, il legame fra lo scoppiamento e il numero di Lelong è più complicato e si può vedere in [AB 96b], 3.6 e 3.7.

Come conseguenza per il caso chiuso, citiamo il seguente risultato, che generalizza il caso di funzioni plurisubarmoniche non negative.

Proposizione 10.1 *([AB 96b], corollario 3.2). Sia T una corrente positiva e chiusa in un intorno di zero, espressa con un potenziale locale $T = i\partial\bar{\partial}A$. Se $A \geq 0$, allora $n(T,0) = 0$.*

Appendice. Le definizioni fondamentali

Richiamiamo qui, soprattutto per fissare la notazione, le basi della teoria delle correnti. Al lettore non familiare con l'argomento consigliamo i seguenti testi: [Le 68], [Siu 74], [Ha 77], [De 92b]. La teoria delle forme differenziali e correnti *su spazi analitici* si trova per esempio in [De 85], capitolo 1.

Secondo la definizione classica di G. de Rham (1955), data una varietà differenziabile M di dimensione n,

una *corrente* T su M è un funzionale lineare definito sullo spazio vettoriale delle forme lisce a supporto compatto in M, che è continuo, cioè

(i) se $\{\varphi_j\}$ è una successione di forme lisce, i cui supporti sono tutti contenuti in un singolo compatto che sta dentro il dominio di una carta locale,

(ii) e tale che tutte le derivate dei coefficienti di ogni φ_j tendono uniformemente a zero per $j \to \infty$,

allora $T(\varphi_j) \to 0$.

Quindi, se indichiamo con $D^p(M)$ lo spazio delle p-forme lisce a supporto compatto in M, dotato della topologia della convergenza uniforme sui compatti con tutte le derivate, una corrente di *dimensione* p (o *grado* $n-p$) è un elemento dello spazio duale topologico $D'_p(M)$.

Esempi fondamentali.

I. Un p-simplesso orientato A, o una sottovarietà orientata A (con bordo), definiscono una corrente, denotata con $[A]$ o con T_A, come

$$\varphi \to \int_A \varphi \qquad \forall\varphi \in D^p(M).$$

$[A]$ è detta una *corrente di integrazione.*

II. Una forma differenziale α a coefficienti in L^1_{loc} definisce una corrente T_α come

$$\varphi \to \int_M \alpha \wedge \varphi \qquad \forall \varphi \in D^*(M)\,.$$

Per estensione, a volte si scrive $T(\varphi) = \int_M T \wedge \varphi$, per una qualsiasi corrente T su M. Se α è una forma (liscia), chiameremo T_α una *corrente liscia*.

Vedremo che in realtà le correnti più importanti sono strettamente legate a questi due modelli fondamentali.

Dato che una corrente è di dimensione p, o di grado $k = n - p$, se $T(\varphi) = 0\ \forall \varphi \in D^*(M)$, omogenea di grado diverso da p, una sottovarietà di dimensione p dà una corrente di dimensione p, mentre una forma differenziale di grado k dà una corrente di grado k. Una distribuzione è una corrente di dimensione zero.

Il *supporto* di una corrente T, $\operatorname{supp} T$, è il chiuso di M definito da questa proprietà:

$$x \notin \operatorname{supp} T \text{ se e solo se esiste un intorno } U \text{ di } x \text{ tale che}$$
$$\forall \varphi \in D^*(U),\ T(\varphi) = 0.$$

Una corrente T è *di ordine q* se $T(\varphi_j) \to 0$ quando $\{\varphi_j\}$ è una successione come in (i), dove i coefficienti delle forme tendono a zero uniformemente insieme alle loro derivate di ordine $\leq q$. Quindi una corrente di ordine q può essere estesa alle forme differenziali (a supporto compatto) con coefficienti di classe C^q. Noi useremo principalmente correnti di ordine zero (per esempio, la δ di Dirac, ma non le sue derivate; le correnti di integrazione su sottovarietà orientate; le correnti lisce).

In carta locale $(U, x_1, \ldots, x_n)$, possiamo scrivere una corrente di grado k come una k-forma differenziale a coefficienti correnti di grado zero, in questo modo:

$$T = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} t_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\,,$$

dove i coefficienti sono definiti da:

$$t_{i_1,\ldots,i_k}(f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) := T(f dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p})\varepsilon_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_p}$$

($j_1, \dots, j_p$ sono indici complementari a $i_1, \dots, i_k$ e $\varepsilon_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_p}$ è il segno della permutazione).

Usando poi l'elemento di volume $dV = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, a ogni corrente di grado zero si associa una distribuzione:

$$T_{i_1,\dots,i_k}(f) := t_{i_1,\dots,i_k}(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)\,.$$

Si usa dire perciò che *una corrente di grado k è una k-forma a coefficienti distribuzioni*, e se T è di ordine zero, che è una forma a coefficienti misure (di Radon).

ESEMPIO. Sia A la sottovarietà di U definita dall'annullarsi delle ultime $n-p$ coordinate, per cui $(x_1, \dots, x_p)$ sono coordinate su A. Allora $[A] = \mu_(x) dx_{p+1} \wedge \dots \wedge dx_n$, dove $\mu_(x)$ è la misura data dal prodotto della misura di Lebesgue sulle coordinate di A e la δ di Dirac nell'origine sulle altre:

$$\mu_(x) = \mathbf{1}(x_1, \dots, x_p) \otimes \delta_0(x_{p+1}, \dots, x_n)\,.$$

Se T è una corrente di ordine zero, scritta in carta locale come

$$T = \sum_{i_1 < \dots < i_k} T_{i_1,\dots,i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\,,$$

e $A \subset U$, denotiamo con $\chi_A T$ la corrente i cui coefficienti sono le misure $\chi_A T_{i_1,\dots,i_k}$ definite come

$$(\chi_A T_{i_1,\dots,i_k}(E) := T_{i_1,\dots,i_k}(A \cap E)\,.$$

Noi ci occupiamo di varietà complesse (quindi sempre orientate): in questo caso il testo di riferimento classico è il libro di P. Lelong [Le 68], da cui ora prendiamo la definizione di correnti positive e chiuse, la classe più importante di correnti nel caso complesso. Per la nozione di spazio analitico complesso si può fare riferimento per esempio a [GR 79]: in particolare noi useremo le seguenti definizioni.

Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{E}_U$ il fascio dei germi delle funzioni lisce su U, $\mathcal{O}_U$ il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su U. Se $\mathcal{J}$ è un ideale coerente di $\mathcal{O}_U$, e A è il supporto del fascio $\mathcal{O}_U/\mathcal{J}$, risulta che A è chiuso e $\mathcal{O}_A := (\mathcal{O}_U/\mathcal{J})|_A$ è coerente. $(A, \mathcal{O}_A)$ è detto un sottospazio analitico chiuso di U.

Una coppia $(X, \mathcal{O}_X)$, dove X è uno spazio topologico di Hausdorff e $\mathcal{O}_X$ è un fascio di C-algebre locali, è detta:

- una varietà analitica complessa liscia (complex manifold, per noi *varietà complessa*) se è localmente isomorfa a $(U, \mathcal{O}_U)$, con U aperto di $\mathbb{C}^n$

- uno spazio analitico complesso se è localmente isomorfa a $(A, \mathcal{O}_A)$ sottospazio analitico chiuso.

Un sottospazio analitico chiuso, o *sottoinsieme analitico*, di uno spazio analitico $(X, \mathcal{O}_X)$ è $(Y, \mathcal{O}_Y)$, dove $Y := \operatorname{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ e $\mathcal{O}_Y := (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})|Y$, con $\mathcal{J}$ ideale coerente di $\mathcal{O}_X$ (la struttura è quella ridotta, vedi [GR 79] p. 18). Y ha una decomposizione $Y = \cup_{j \in J} Y_j$ con queste proprietà:

- J è un insieme di indici al più numerabile

- la famiglia $\{Y_j\}$ è localmente finita e ogni Y_j è un sottoinsieme analitico irriducibile

- per $i \neq j$, l'intersezione $Y_j \cap Y_j$ è mai densa in Y_j, e quindi ha codimensione almeno 1.

Le Y_j sono dette le *componenti irriducibili* di Y. Chiameremo *sottovarietà (complesse)* i sottoinsiemi analitici irriducibili.

Su una varietà complessa M di dimensione (complessa) n, all'algebra di Grassmann delle forme differenziali (e quindi anche delle correnti) si può dare una bi-gradazione: parleremo perciò di (p, q)-forme

$$\varphi = \sum_{|I|=p, |J|=q} \varphi_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J \in E^{p,q}(M)$$

e di *correnti di bidimensione* (p, q), o $(n-p, n-q)$*-correnti*, definite da

$$T(\alpha) = 0 \qquad \text{se } \alpha \notin D^{p,q}(M) := E^{p,q}(M) \cap D^{p+q}(M) \,.$$

E' possibile identificare in modo naturale il duale topologico dello spazio $E^{p,q}(M)$ con le correnti di $D'_{p,q}(M)$ a supporto compatto; indicheremo questo spazio con $E'_{p,q}(M)$.

Una corrente T di bidimensione (p,p) (denotata con $T_{p,p}$) si dice positiva (nel senso di Lelong, o debolmente positiva) se per ogni scelta di (1,0)-forme lisce su M, $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$, la distribuzione (corrente di dimensione zero)

$$T \wedge i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \ldots \wedge i\alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p$$

è una misura positiva.* Questo equivale ad affermare che, per ogni p-piano complesso W di $\mathbb{C}^n$, se $\pi : \mathbb{C}^n \to W$ è la proiezione ortogonale, allora $\pi_*(\varphi T)$ è una misura positiva per ogni funzione di cut-off φ. Le definizioni di correnti positive in senso regolare e in senso forte, i loro legami e i legami con le forme positive possono essere visti in [HaKn 74], o [Ha 77] o [De 82a]. Le differenti nozioni coincidono nei casi $p = 1$ o $p = n - 1$.

Si può osservare che una corrente positiva è reale (cioè $T = \overline{T}$) e di ordine zero (ovvero i suoi coefficienti sono misure) ([Ha 77], Lemma 1.20). Torniamo al caso reale per definire la chiusura.

L'operatore di bordo b sulle correnti si definisce come l'aggiunto del differenziale esterno d sulle forme:

$$(bT)(\varphi) := T(d\varphi) \qquad \forall \varphi \in D^*(M)\,.$$

Dal teorema di Stokes, se A è una catena orientata,

$$b[A](\varphi) = [A](d\varphi) = \int_A d\varphi = \int_{bA} \varphi = [bA](\varphi)$$

cioè il bordo nel senso delle correnti corrisponde al bordo nel senso dell'omologia; per esempio, se A è una sottovarietà (senza bordo), $bT_A = 0$. Se T_α è la corrente determinata da una k-forma liscia α,

$$\begin{aligned} bT_\alpha(\varphi) = T_\alpha(d\varphi) &= \int_M \alpha \wedge d\varphi \\ &= (-1)^k \int_M d(\alpha \wedge \varphi) + (-1)^{k+1} \int_M d\alpha \wedge \varphi \\ &= (-1)^{k+1} \int_M d\alpha \wedge \varphi \\ &= (-1)^{k+1} T_{d\alpha}(\varphi)\,. \end{aligned}$$

*Ricordiamo che il prodotto fra una corrente e una forma è definito come

$$(T \wedge \alpha)(\varphi) := T(\alpha \wedge \varphi) \qquad \forall \varphi \in D^*(M)\,.$$

Per questo motivo *si definisce* dT come $(-1)^{k+1}bT$, se T ha grado k.

Su una varietà complessa M l'operatore d, ristretto alle (p,q)-forme, è

$$d : E_{p,q}(M) \to E^{p+1,q}(M) \oplus E^{p,q+1}(M);$$

lo possiamo quindi comporre con le proiezioni sul primo e sul secondo addendo del codominio, ottenendo gli operatori $\partial : E^{p,q}(M) \to E^{p+1,q}(M)$ e $\overline{\partial} : E^{p,q}(M) \to E^{p,q+1}(M)$. Gli stessi operatori sono definiti sulle correnti per dualità.

Se vogliamo lavorare con forme positive, e quindi di bidimensione (p,p), l'operatore più utile è dato dalla composizione $i\partial\overline{\partial} : E^{p,p}(M) \to E^{p+1,p+1}(M)$. Definendo l'operatore $d^c := i(\overline{\partial} - \partial)$, dato che $d = \partial + \overline{\partial}$, si ottiene che $2i\partial\overline{\partial} = dd^c$.

La chiusura si definisce rispetto a ognuno dei quattro operatori che abbiamo visto: chiameremo correnti chiuse quelle chiuse rispetto al d, cioè tali che $dT = 0$, e correnti pluriarmoniche le correnti chiuse rispetto all'operatore $i\partial\overline{\partial}$. Notiamo che se T è una (p,p)-corrente reale (o positiva), sono equivalenti $dT = 0$, $\partial T = 0$ e $\overline{\partial} T = 0$, ma non $i\partial\overline{\partial} T = 0$.

Esempio. Formula di Cauchy. (vedi per esempio [Ho 90], Theorem 1.2.1) Essa afferma che per ogni funzione $\varphi \in D^*(\mathbb{C})$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{dz}{z} \wedge \overline{\partial}\varphi\,, \text{ ovvero } \delta_0 = \frac{1}{2\pi i}\overline{\partial}\left(\frac{dz}{z}\right),$$

quindi esprime la delta di Dirac (nell'origine) nella forma $\overline{\partial}T$.

Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$. Una funzione u di classe C^2 su U è detta plurisubarmonica se la corrente

$$i\partial\overline{\partial}u = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} dz_i d\overline{z}_j$$

è positiva, il che succede se e solo se la matrice Hessiana complessa $(\partial^2 u/\partial z_i \partial \overline{z}_j)$ è semidefinita positiva. Notiamo l'analogia con la condizione che caratterizza le funzioni convesse su $\mathbb{R}^n$: tuttavia, quest'ultima definizione non è generalizzabile al caso delle varietà, a meno che i cambiamenti di coordinate non siano affini, mentre la prima definizione è compatibile con cambi di carta olomorfi, e quindi permette di definire funzioni plurisubarmoniche su varietà complesse. Più in generale, consideriamo la seguente definizione (vedi [Le 68], Teorema 3).

Una funzione $u : U \to [-\infty, +\infty)$, U aperto connesso di $\mathbb{C}^n$, si dice *plurisubarmonica* se u non è identicamente $-\infty$, u è superiormente semicontinua e $\forall z, w \in \mathbb{C}^n$, $\forall \tau \in \mathbb{C}$, vale $u(z + \tau w)$ è una funzione di τ subarmonica (dove è definita).

Esempio. Se f è olomorfa, $\log |f|$ è plurisubarmonica.

Per quanto riguarda la teoria delle funzioni plurisubarmoniche, si può vedere il secondo capitolo di [Le 68] e i testi ivi citati. Se u è plurisubarmonica, sia u che le sue derivate stanno in $L^1_{\text{loc}}(U)$; notiamo che possiamo identificare l'insieme delle funzioni plurisubarmoniche su U con l'insieme delle distribuzioni f su U tali che $i\partial\overline{\partial}f \geq 0$. Infatti questa condizione di positività garantisce l'esistenza di una funzione $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$ plurisubarmonica nel senso della precedente definizione e coincidente con f fuori di un insieme di misura nulla. Per le funzioni plurisubarmoniche, anche su spazi analitici, è interessante consultare [De 85].

Sia ora T una (k, k)-corrente: diremo che T è plurisubarmonica se $i\partial\overline{\partial}T \geq 0$. Perciò una (0,0)-corrente plurisubarmonica è una funzione plurisubarmonica, e quindi sta in L^1_{loc}, mentre per $k > 0$ le correnti plurisubarmoniche non sono in generale a coefficienti in L^1_{loc}, e nemmeno sono correnti di ordine zero: basta infatti prendere una $(k, k-1)$-corrente S di ordine qualsiasi e considerare $T = \overline{\partial}S + \partial\overline{S}$: essa è pluriarmonica, e quindi plurisubarmonica.

Con riferimento agli esempi fondamentali di correnti I e II, possiamo ora presentare gli esempi importanti di correnti positive e chiuse:

- ogni funzione plurisubarmonica u dà luogo ad una corrente positiva e chiusa $T = i\partial\overline{\partial}u$ di bigrado (1,1) e viceversa ogni (1,1)-corrente positiva e chiusa T si scrive localmente come $T = i\partial\overline{\partial}u$, con u funzione plurisubarmonica che è detta potenziale di T (si può vedere l'appendice di [De 85], e i riferimenti ivi citati, o il quarto capitolo di [Le 68])

- ogni sottovarietà complessa è una corrente positiva e chiusa.

Da ultimo, ricordiamo la definizione di immagine diretta di una corrente.

Siano M ed N due varietà differenziabili, $f : M \to N$ una mappa liscia, $f^* : E^k(N) \to E^k(M)$ la mappa pull-back di forme secondo f. L'aggiunto di f^* è la *mappa immagine diretta di correnti secondo* f:

$$f_* : E'_k(M) \to E'_k(N), \qquad (f_*T)(\varphi) = T(f^*\varphi) \quad \forall \varphi \in E^k(N).$$

L'immagine diretta commuta con l'operatore d.

Fra le nozioni preliminari che qui non richiamiamo vi sono alcuni argomenti di algebra multilineare, per i quali si può vedere [Siu 74], capitolo 1, o [HaKn 74].

Riferimenti bibliografici

[AB 92] ALESSANDRINI, L., BASSANELLI, G., Positive $\partial\overline{\partial}$-closed currents and non-Kähler geometry, J. Geometric Analysis 2 (1992) 291-316.

[AB 93a] ALESSANDRINI, L., BASSANELLI, G., Metric Properties of manifolds bimeromorphic to compact Kähler spaces, J. Differential Geomerty 37 (1993) 95-121.

[AB 93b] ALESSANDRINI, L., BASSANELLI, G., Plurisubharmonic currents and their extension across analytic subsets, Forum Math. 5 (1993) 577-602.

[AB 95] ALESSANDRINI, L., BASSANELLI, G., Modifications of compact balanced manifolds, C.R. Acad. Sci. Paris 320 (1995) 1517-1522.

[AB 96a] ALESSANDRINI, L., BASSANELLI, G., The class of compact balanced manifolds is invariant under modifications, in “Complex Analysis and Geometry”, Ancona-Ballico-Silva eds., Lecture Notes in Math., Dekker (1996).

[AB 96b] ALESSANDRINI, L., BASSANELLI, G., Lelong numbers of positive plurisubharmonic currents, Results in Math. 30 (1996) 191-224.

[AB 99] ALESSANDRINI, L., BASSANELLI, G., Compact complex threefolds which are Kähler outside a smooth rational curve, Math. Nachr. **207** (1999) 21–59.

[AN 67] ANDREOTTI, A., NORGUET, F., La convexité holomorphe dans l'espace analytique des cycles d'une variété algebrique, Ann. S.N.S. 21 (1967) 31-82.

[Bar 75] BARLET, D., Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie, Sem. Norguet, Springer LNM 482 (1975) 1-158.

[Bar 78] BARLET, D., Convexité de l'espace des cycles, Bull. S.M.F., 106 (1978) 373-397.

[Bas 94] BASSANELLI, G., A cut-off theorem for plurisubharmonic currents, Forum Math. 6 (1994) 567-595.

[Bas 98] BASSANELLI, G., A geometrical application of the product of two positive currents, Progress in Math. 188, Birkhäuser, Basel (2000) 83–90.

[BT 82] BEDFORD, E., TAYLOR, B.A., A new capacity for plurisubharmonic functions, Ann. of Math. 149 (1982) 1-40.

[Be 83] BEN MESSAOUD, H., Courants intermédiaires associées à un courant positif fermé, Sem. Lelong-Skoda, Springer LNM 1028 (1983) 41-68.

[Bi 64] BISHOP, E., Conditions for analyticity of certain sets, Mich. Math. J. 11 (1964) 289-304.

[Bo 70] BOMBIERI, E., Algebraic values of meromorphic maps, Invent. Math. 10 (1970) 267-287; addendum ibidem 11 (1970) 163-166.

[Bo 85] BOMBIERI, E., An Introduction to Minimal Currents and Parametric Variational Problems, Math. Rep. Harwood Acad. Publ. 2 (1985) 285-384.

[Cam 80] Campana, F., Algébricité et compacité dans l'espace des cycles d'un espace analytique complexe, Math. Ann. 251 (1980) 7-18.

[Cas 77] Cassa, A., The topology of the Space of Positive Analytic Cycles, Ann. Mat. Pura Appl. 112 (1977) 1-12.

[Ch 89] Chirka, E. M., Complex analytic sets, Kluwer Acad. Publ. (1989).

[De 82a] Demailly, J.P., Relations entre les différentes notions de fibrés et de courants positifs, Sem. Lelong-Skoda 1980-81, Springer LNM 919 (1982) 56-76.

[De 82b] Demailly, J.P., Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé, Ann. Inst. Fourier 32 (1982) 37-66.

[De 85] Demailly, J.P., Mesure de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines, Mem. S.M.F. (N.S.) 19 (1985).

[De 87] Demailly, J.P., Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'integralité et d'analyticité, Acta Math. 159 (1987) 153-169.

[De 92a] Demailly, J.P., Regularization of closed positive currents and intersection theory, J. Algebraic Geometry 1 (1992) 361-406.

[De 92b] Demailly, J.P., Courants positifs et theorie de l'intersection, Gazette des Math. 53 (1992) 131-159.

[De 93a] Demailly, J.P., Monge-Ampere operators, Lelong Numbers and Intersection Theory, in "Complex analysis and geometry" Trento 1991, Ancona-Silva eds., Plenum Press (1993) 115-193.

[De 93b] Demailly, J.P., A numerical criterion for very ample line bundles, J. Differential Geometry 37 (1993) 323-374.

[DPS 94] DEMAILLY, J.P., PETERNELL, T., SCHNEIDER, M., Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles, J. Algebraic Geometry 3 (1994) 295-345.

[dR 55] DE RHAM, G., Variétés différentiables, Paris, Hermann (1955).

[E 84] EL MIR, H., Sur le prolongement des courants positifs fermés, Acta Math. 153 (1984) 1-45.

[Fe 69] FEDERER, H., Geometric Measure Theory, Springer Berlin-Heidelberg-New York (1969).

[FF 60] FEDERER, H., FLEMING, W., Normal and integral currents, Ann. of Math. 72 (1960) 458-520.

[Fu 78] FUJIKI, A., Closedness of the Douady spaces of Compact Kähler spaces, Publ. RIMS Kyoto 14 (1978) 1-52.

[Fu 82] FUJIKI, A., On the Douady space of a compact complex space in the category C, Nagoya Math. J. 85 (1982) 189-211.

[GR 56] GRAUERT, H., REMMERT, R., Plurisubharmonisce Funktionen in komplexen Räumen, Math. Z. 65 (1956) 175-194.

[GR 79] GRAUERT, H., REMMERT, R., Theory of Stein Spaces, Springer Berlin-Heidelberg- New York (1979).

[GH 78] GRIFFITHS, P., HARRIS, J., Principles of Algebraic Geometry. Wiley Interscience Publ. New York (1978).

[Ha 74] HARVEY, R., Removable singularities for positive currents, Amer. J. Math. 96 (1974) 67-78.

[Ha 77] HARVEY, R., Holomorphic chains and their boundaries, Proc. Symp. Pure Math. 30 (1977) 309-382.

[HaKi 72] HARVEY, R., KING, J.R., On the structure of positive currents, Invent. Math. 15 (1972) 47-52.

[HaKn 74] HARVEY, R., KNAPP, A.W., Positive (p,p)-forms, Wirtinger's inequality and currents, Proceedings Tulane Univ. 1972-73, Dekker, New York, (1974) 43-62.

[HL 83] HARVEY, R., LAWSON, J.R., An intrinsic characterization of Kähler manifolds. Invent. Math. 74 (1983) 169-198.

[HP 75] HARVEY, R., POLKING, J., Extending analytic objects, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975) 701-727.

[HS 74] HARVEY, R., SHIFFMANN, B., A characterization of holomorphic chains, Ann. of Math. 99 (1974) 553-587.

[Ho 90] HÖRMANDER, L., An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Third Edition, North Holland (1990).

[I 92] IVASHKOVICH, S.M., Spherical shells as obstructions for the extension of holomorphic mappings, J. Geometric Analysis 2 (1992).

[Ji 91] JI, S., Smoothing of Currents and Moishezon Manifolds, Proc. Symp. Pure Math. 52 (1991) 273-281.

[JS 93] JI, S., SHIFFMAN, B., Properties of compact complex manifolds carrying closed positive currents. J. Geometric Analysis 3 (1993) 37-61.

[Kin 71] KING, J.R., The currents defined by analytic varieties, Acta Math. 127 (1971) 185-220.

[Kin 74] KING, J.R., Global residues and intersections on a complex manifold, Trans. AMS 192 (1974) 163-199.

[Le 57] LELONG, P., Integration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. Math. France 85 (1957) 239-262.

[Le 68] LELONG, P., Plurisubharmonic Functions and Positive Differential Forms, Gordon and Breach, Dunod, Paris (1968).

[Le 72] LELONG, P., Eléments extremaux sur le cone des courants positifs férmes, Sem. Lelong 1971/72, Springer LNM 332 (1972).

[Le 77] LELONG, P., Sur la structure des courants positifs férmes, Sem. Lelong 1975/76, Springer LNM 578 (1977) 136-156.

[MS 95] MCDUFF, D., SALAMON, D., Introduction to Symplectic Topology, Oxford Math. Monograph, Oxford Sci. Publ. (1995).

[No 72] NORGUET, F., Remarques sur la cohomologie des variétés analytiques complexes, Bull. S.M.F. 100 (1972) 435-447.

[NS 77] NORGUET, F., SIU, Y.T., Holomorphic convexity of spaces of analytic cycles, Bull. S.M.F. 105 (1977) 191-223.

[P 86] PETERNELL, T., Algebraicity criteria for compact complex manifolds, Math. Ann. 275 (1986) 653-672.

[R 96] RABY, G., Tranchage des courants positifs fermés et équation de Lelong-Poincaré, J. Math. Pure Appl. 75 (1996) 189-209.

[Sc 50] SCHWARTZ, L., Théorie des distributions I, Paris, Hermann et Cie (1950).

[Sch 70] Schäfer, H.H., Topological vector spaces, Graduate Texts in Mathematics 3, Springer 1970.

[Sh 68] SHIFFMAN, B., On the removal of singularities of analytic sets, Mich. Math. J. 15 (1968) 111-120.

[Sh 86] SHIFFMANN, B., Complete characterization of holomorphic chains of codimension one, Math. Ann. 274 (1986) 233-256.

[Sib 85] SIBONY, N., Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe, Duke Math. J. 52 (1985) 157-197.

[Sil 96] SILVA, A., $\partial\overline{\partial}$-closed positive currents and special metrics on compact complex manifolds. in “Complex Analysis and Geometry”, Ancona-Ballico-Silva eds., Lecture Notes in Math., Dekker (1996).

[Siu 73] SIU, Y.T., Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of meromorphic maps, Bull. AMS 79 (1973) 1200-1205.

[Siu 74] SIU, Y.T., Analyticity of Sets associated to Lelong Numbers and the Extension of Closed Positive Currents, Invent. Math. 27 (1974) 53-156.

[Siu 75] SIU, Y.T., Extension of meromorphic maps into Kähler manifolds, Ann. of Math. 102 (1975) 421-462.

[Sk 72] SKODA, H., Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$, Bull. S.M.F. 100 (1972) 353-408.

[Sk 82] SKODA, H., Prolongement de courants, positif, fermes, de masse finie, Invent. Math. 66 (1982) 361-376.

[Sk 84] SKODA, H., A survey on the theory of closed positive currents, Proc. Symp. Pure Math. (AMS) 41 (1984) 181-190.

[St 67] STOLL, W., The Continuity of the Fibre Integral, Math. Zeit. 95 (1967) 87-138.

[Su 76] SULLIVAN, D., Cycles for the dinamical study of foliated manifolds and complex manifolds, Invent. Math. 36 (1976) 225-255.

[Va 84] VAROUCHAS, J., Stabilité de la classe des variétés Kählériennes par certains morphismes propres, Invent. Math. 77 (1984) 117-127.

[Va 85] VAROUCHAS, J., Sur l'image d'une variété kähleriénne compacte, Sem. Norguet 1983-84, Springer LNM 1188 (1985) 245-259.