TIM STEGER*

Università degli Studi di Sassari

LA MONOTONIA DI RAPPRESENTAZIONI DEL GRUPPO LIBERO

Conferenza tenuta il 6 giugno 1997

ABSTRACT. Let Γ be a free nonabelian group on finitely many generators. Let Ω be the boundary of Γ, let $C(\Omega)$ be the C^*-algebra of continuous functions on Ω, and let λ be the natural action of Γ on $C(\Omega)$. A *boundary representation* is a representation of the crossed product C^*-algebra $\Gamma \ltimes_\lambda C(\Omega)$.

Given a unitary representation π of Γ on $\mathcal{H}$, a *boundary realization* of π is an isometric Γ-inclusion of $\mathcal{H}$ into the space of a boundary representation whose image is cyclic for that boundary representation. If the Γ-inclusion is bijective, we call the realization *perfect*. We prove below that if π admits an imperfect boundary realization, then there exists a nonzero vector $v_0 \in \mathcal{H}$ satisfying

$$\sum_{|x|=n} |\langle v, \pi(x) v_0 \rangle|^2 \le |v|^2 \qquad \text{for each } v \in \mathcal{H} \qquad \text{(GVB)}$$

If π is irreducible and weakly contained in the regular representation, and if no such v_0 exists, it follows that π satisfies *monotony*: up to equivalence, there exists exactly one realization of π, and that realization is perfect.

1 Introduzione

1.1 Il gruppo, l'albero, e il bordo

Sia Γ il gruppo libero non commutativo su un insieme finito A^+ di generatori. Sia $A = \{a, a^{-1};\ a \in A^+\}$, e sia $q + 1 = \#(A)$. Sia $e \in \Gamma$ l'identità del gruppo. Il grafo di Cayley di Γ rispetto all'insieme di generatori A è un

*L'autore ringrazia l'Università degli Studi di Milano per l'opportunità di tenere questo seminario.

albero omogeneo con $q+1$ spigoli ad ogni vertice. Una *parola ridotta* in Γ è un prodotto della forma $x = a_1 \dots a_n$ dove $a_j \in A$ e $a_j a_{j+1} \neq e$. In questo caso n è la *lunghezza* dell'elemento $x \in \Gamma$, scritta $|x|$. Sull'albero, abbiamo $|x| = d(e,x)$, dove la distanza nell'albero è misurata in spigoli.

La definizione di Ω, il *bordo* dell'albero o del gruppo Γ si può trovare, ad esempio, in [FT–Ne] o [KuSt1]. Una geodetica semiinfinita nell'albero è una successione $(x_j)_{j=0}^{\infty}$ tale che $d(x_j, x_k) = |j-k|$. Per ciascun $x \in \Gamma$ e ciascun $\omega \in \Omega$ esiste un unica geodetica $[x,\omega)$ che parte da x è arriva ad ω. La geodetica dall'identità ad ω è della forma

$$[e,\omega) = (e, a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots) \qquad \text{dove } a_j \in A \text{ e } a_j a_{j+1} \neq e$$

Così si identifica ω con la parola ridotta infinita $a_1a_2a_3\cdots$. Sia, per $x \in \Gamma$,

$$\Omega(x) = \{\omega \in \Omega\,;\ \text{la parola ridotta di } \omega \text{ comincia con quella di } x\}$$

Si osserva che per ogni intero $n \geq 0$

$$\Omega = \coprod_{|x|=n} \Omega(x)$$

Gli insiemi $\Omega(x)$ costituiscono una base per la topologia di Ω. Come spazio topologico Ω è compatto, separabile, e totalmente sconnesso, quindi omeomorfo all'insieme di Cantor.

Con la moltiplicazione a sinistra G agisce sul suo grafo di Cayley, l'albero. Quest'azione si estende ad un'azione per omeomorfismi su Ω. Se $x \in \Gamma$ e $\omega \in \Omega$, si può calcolare $x \cdot \omega$ come il prodotto fra le due parole ridotte, la seconda della quale è infinita.

Sia $C(\Omega)$ l'algebra-C^* delle funzioni complesse continue su Ω. Sia $\lambda : \Gamma \to \operatorname{Aut} C(\Omega)$ l'azione naturale:

$$(\lambda(x)G)(\omega) = G(x^{-1} \cdot \omega) \qquad \text{se } x \in \Gamma,\ G \in C(\Omega), \text{ e } \omega \in \Omega$$

Per $x \in \Omega$, sia $\mathbf{1}_x \in C(\Omega)$ la funzione caratteristica di $\Omega(x)$.

Sia x, e $y \in \Gamma$. Si dice che il prodotto xy è *senza cancellazione* se $|xy| = |x| + |y|$. Questa vale se e solo se l'ultima lettera di x e la prima lettera di y non sono una l'inversa dell'altra.

Lemma 1. *Se x, $y \in \Gamma$ e il prodotto xy è senza cancellazione, allora $x \cdot \Omega(y) = \Omega(xy)$.*

Corollario. *Se l'ultima lettera di x è a^{-1}, allora $x \cdot (\Omega \sim \Omega(a)) \subseteq \Omega(x)$. Quindi $\lambda(x)(\mathbf{1} - \mathbf{1}_a) \leq \mathbf{1}_x$.*

1.2 Rappresentazioni e realizzazione sul bordo

Lavoriamo esclusivamente con le rappresentazioni unitarie.

Definizione 1. Una *rappresentazione* (o *rappresentazione unitaria*) π di Γ su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è un omomorphismo $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Si dice che $\mathcal{H}$ è un Γ-*spazio.* Si dice che π è *irriducibile* se non ci sono Γ-sottospazi chiusi di $\mathcal{H}$ diversi da 0 e $\mathcal{H}$.

Definizione 2. Una *rappresentazione sul bordo* (o $(\Gamma, C(\Omega))$*-rappresentazione*) π' su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}'$ è una coppia:

- $\pi' : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H}')$, una rappresentazione
- $\pi' : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}')$, un omomorfismo di algebre-C^*

tale che, per $x \in \Gamma$ e $G \in C(\Omega)$,

$$\pi'(x)\pi'(G)\pi'(x^{-1}) = \pi'(\lambda(x)G) \tag{1}$$

Si dice che $\mathcal{H}'$ è un $(\Gamma, C(\Omega))$*-spazio.* Si dice che π' è *irriducibile* se non ci sono $(\Gamma, C(\Omega))$-sottospazi chiusi di $\mathcal{H}'$ diversi da 0 e $\mathcal{H}'$.

Una rappresentazione sul bordo non è altro che una rappresentazione dell'algebra-C^* prodotto incrociato $\Gamma \ltimes C(\Omega)$.

Definizione 3. Data una rappresentazione π di Γ su $\mathcal{H}$, una *realizzazione sul bordo* di π è una coppia:

- π', una rappresentazione sul bordo su $\mathcal{H}'$
- $\iota : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, una Γ-isometria

tale che

- $\pi'(C(\Omega))\iota(\mathcal{H})$ è denso in $\mathcal{H}'$

La realizzazione si chiama *perfetta* se ι è unitaria, cioè biunivoca.

Il terzo punto richiede che l'immagine di ι sia ciclica nello $(\Gamma, C(\Omega))$-spazio $\mathcal{H}'$. Se questo solo punto non è verificato, possiamo renderlo vero sostituendeo $\mathcal{H}'$ con la chiusura di $\pi'(C(\Omega))\iota(\mathcal{H})$.

Definizione 4. Due realizzazioni, (ι_1, π'_1) e (ι_2, π'_2), sono *equivalenti* se esiste una mappa unitaria $J : \mathcal{H}'_1 \to \mathcal{H}'_2$ tale che

$$\begin{aligned} J\pi'_1(x) &= \pi'_2(x)J && \text{se } x \in \Gamma \\ J\pi'_1(G) &= \pi'_2(G)J && \text{se } G \in C(\Omega) \\ J\iota_1 &= \iota_2 \end{aligned}$$

Benchè questo fatto non sia usato nel seguito, si può dimostrare che una rappresentazione π di Γ ammette una realizzazione sul bordo se e solo se π è debolmente contenuta nella rappresentazione regolare.

1.3 Alcune rappresentazioni sul bordo

Sia $(h(a))_{a\in A}$ una fissata n-upla di numeri complessi, ciascuno di modulo $q^{-1/2}$. Scegliamo una n-upla generica nel senso che

$$h(a)h(a^{-1}) \neq h(b)h(b^{-1}) \qquad \text{per almeno un } a \text{ e un } b \text{ in } A$$

Dalla n-upla costruiremo una rappresentazione sul bordo π'_h. Questa costruzione è un caso ristretto ma rappresentativo di quella introdotta in [KuSt1].

Sia ν la misura positiva su Ω ottenuta ponendo

$$\nu(\Omega(x)) = \frac{q}{q+1}q^{-|x|} \qquad \text{per } x \in \Gamma,\ |x| \geq 1$$

Sia $\mathcal{H}' = L^2(\Omega, d\nu)$. Per $f \in \mathcal{H}'$ e $g \in C(\Omega)$ sia

$$(\pi'_h(G)f)(\omega) = G(\omega)f(\omega)$$

Per quanto riguarda $\pi'_h(x)$ dove $x \in \Gamma$, basta definire $\pi'_h(a)$ dove $a \in A$:

$$(\pi'_h(a)f)(\omega) = \begin{cases} h(a^{-1})^{-1}f(a^{-1}\cdot\omega) & \text{se } \omega \in \Omega(a) \\ h(a)f(a^{-1}\cdot\omega) & \text{se } \omega \notin \Omega(a) \end{cases} \tag{2}$$

La coerenza di questa definizione dipende dall'identità $\pi'_h(a)\pi'_h(a^{-1}) = \mathrm{id}$. La condizione $|h(a)| = q^{-1/2}$ garantisce l'unitarietà. Si verifica in fine l'equazione (1).

Sia π_h la rappresentazione unitaria di Γ definita nell'equazione (2). In altre parole, π_h è la prima delle due componenti di π'_h. La coppia $(\mathrm{id}_{\mathcal{H}'}, \pi'_h)$ è una realizzazione perfetta di π_h. Ci possono essere altre e meno evidenti realizzazioni di π?

Niente affatto. Il risultato principale di [KuSt2] è

Teorema. *Sia π_h come sopra o più generalmente come in [KuSt1].*

- *π_h è irriducibile*
- *Ogni realizzazione di π_h sul bordo è equivalente a $(\mathrm{id}_{\mathcal{H}'}, \pi'_h)$.*

1.4 Monotonia, duplicità, e curiosità

Sia π una rappresentazione fissata di Γ su $\mathcal{H}$. Supponiamo che π sia debolmente contenuta nella rappresentazione regolare e che sia irriducibile.

Definizione 5. Supponiamo che π abbia, a meno di equivalenza, una singola realizzazione sul bordo, e che questa sia perfetta. Allora, si dice che π soddisfa la *monotonia*.

Definizione 6. Supponiamo che π abbia due realizzazioni perfette sul bordo, non equivalenti, chiamate (ι_1, π'_1) e (ι_2, π'_2). Supponiamo inoltre che a meno di equivalenza ogni altra realizzazione di π è una Γ-inclusione isometrica di $\mathcal{H}$ nello $(\Gamma, C(\Omega))$-spazio $\mathcal{H}'_1 \oplus \mathcal{H}'_2$. Allora, si dice che π soddisfa la *duplicità*.

In questo caso l'insieme delle realizzazioni di π, a meno di equivalenza, ha la forma di un intervallo chiuso con le due realizzazioni perfette agli estremi.

Definizione 7. Supponiamo che π abbia, a meno di equivalenza, una singola realizzazione sul bordo, (ι, π'), e che questa non sia perfetta. Supponiamo inoltre che il Γ-spazio $\mathcal{H}' \ominus \iota(\mathcal{H})$ sia irriducibile in qualità di rappresentazione di Γ, e che anche questa rappresentazione abbia una sola realizzazione a meno di equivalenza. Allora, si dice che π soddisfa la *curiosità*.

Congettura. Ogni rappresentazione unitaria, irriducibile, e debolmente contenuta nel regolare, soddisfa o la monotonia, o la duplicità, o la curiosità.

Per ciascuna delle 3 condizioni, esistono esempi dove si può dimostrare che la condizione vale. Ad esempio, le rappresentazioni del paragrafo 1.3 soddisfanno la monotonia.

1.5 Coefficienti di matrice

Proposizione Principale. *Sia π una rappresentazione unitaria di Γ su $\mathcal{H}$. Se π ha una realizzazione che non è perfetta, allora esiste un vettore $v_0 \neq 0$ in $\mathcal{H}$ tale che*

$$\sum_{|x|=n} |\langle v, \pi(x)v_0\rangle|^2 \leq \|v\|^2 \qquad \textit{per ogni } v \in \mathcal{H} \tag{GVB}$$

La funzione $x \mapsto \langle v, \pi(x)v_0\rangle$ su Γ si chiama un *coefficiente di matrice* di π. La morale della Proposizione Principale è che una rappresentazione con coefficienti di matrice sufficientemente grandi non può avere realizzazioni non perfette.

In [KuSt2] si dimostra con diversi calcoli e stime, usando un'idea di WALDEMAR HEBISCH, che le rappresentazioni π_h definite nel paragrafo 1.3 non hanno vettori che soddisfanno (GVB). Dopo qualche passo semplice e generale, questo riduce la dimostrazione del Teorema alla Proposizione Principale, e alla seguente:

Lemma 2. *La rappresentazione sul bordo π'_h definito nel paragrafo 1.3 è irriducibile.*

La dimostrazione del Lemma 2 si trova in [PenSt]. In generale, dimostrare l'irriducibilità di una rappresentazione sul bordo è molto più facile che dimostrare l'irriducibilità di una rappresentazione di Γ.

Il seguito è indirizzato alla dimostrazione della Proposizione Principale.

2 Realizzazioni sul bordo: generalità

Sia π una rappresentazione di Γ su $\mathcal{H}$, e sia (ι, π') una realizzazione di π. Si definisce $\alpha : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ secondo

$$\alpha(G) = \iota^* \pi'(G) \iota \tag{3}$$

Lemma 3. *α soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *α è lineare.*
2. *$\alpha(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.*
3. *Se $G \geq 0$ come funzione, allora $\alpha(G) \geq 0$ come operatore.*
4. *Se $G_1 \leq G_2$ come funzione, allora $\alpha(G_1) \leq \alpha(G_2)$ come operatore.*
5. *α è continua rispetto alla topologia del massimo su $C(\Omega)$ e alla topologia della norma su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*
6. *α è una $*$-mappa: $\alpha(\bar{G}) = \alpha(G)^*$.*
7. *Per $x \in \Gamma$, $\pi(x)\alpha(G)\pi(x^{-1}) = \alpha(\lambda(x)G)$.*

I punti 4 e 6 sono conseguenze del punto 3, e il punto 5 è una conseguenza del punto 4. Il punto 7 segue dall'equazione (1).

Lemma 4. *Siano (ι_1, π_1') e (ι_1, π_2') due realizzazioni di π. Si definiscano rispettivamente α_1 e α_2 secondo l'equazione* (3)*. Se $\alpha_1 = \alpha_2$, allora le due realizzazioni sono equivalenti.*

Dimostrazione. Si definisce una mappa $J : \mathcal{H}_1' \to \mathcal{H}_2'$. Per comininciare si pone

$$J\Big(\sum_j \pi_1'(G_j)\iota_1(v_j)\Big) = \sum_j \pi_2'(G_j)\iota_2(v_j) \qquad \text{per } G_j \in C(\Omega) \text{ e } v_j \in \mathcal{H}$$

Tramite l'identità di α_1 e α_2 si dimostra che $|J(v')| = |v'|$ per ciascun v' della data forma. Risulta che J si estende ad un'isometria definita per tutti i vettori $v' \in \mathcal{H}_1'$. L'inverso di J si costruisce nella stessa maniera. Quindi J è unitaria. La costruzione garantisce che J soddisfa le condizioni della Definizione 4. $\square$

Lemma 5. *La mappa $\alpha : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un omomorfismo di algebre se e solo se la realizzazione (ι, π') è perfetta.*

Dimostrazione. Se la realizzazione è perfetta, ι rappresenta un isomorfismo unitario fra $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ e $\iota^* = \iota^{-1}$. Quindi l'equazione (3) definisce una mappa del tutto equivalente a $\pi' : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}')$.

Supponiamo che α sia un omomorfismo di algebre. Risulta dal punto 6 del Lemma 3 che α è addirittura un omomorfismo di algebre-C^*. Se mettiamo $\mathcal{H}_2' = \mathcal{H}$, $\pi_2'(x) = \pi(x)$, $\pi_2'(G) = \alpha(G)$, $\iota_2 = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$, risulta dal punto 7 del Lemma 3 che (ι_2, π_2') è una realizzazione di π. Si calcola $\alpha_2 = \alpha$. Perciò la realizzazione originale, (ι, π'), è equivalente a (ι_2, π_2'), e quest'ultima è perfetta. ◻

Lemma 6. *Se $\alpha(\mathbf{1}_a)$ è una proiezione per ciascun $a \in A$, allora α è un omomorfismo di algebre e quindi (ι, π') è perfetta.*

Dimostrazione. Secondo il punto 6 del Lemma 3, $\alpha(\mathbf{1}_a)$ dev'essere autoaggiunta. Se xa è un prodotto senza cancellazione, allora

$$\alpha(\mathbf{1}_{xa}) = \alpha(\lambda(x)\mathbf{1}_a) = \pi(x)\alpha(\mathbf{1}_a)\pi(x^{-1})$$

è altrettanto una proiezione autoaggiunta. Fissiamo un intero $n > 0$.

$$\sum_{|x|=n} \alpha(\mathbf{1}_x) = \alpha(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

Risulta che gli operatori $(\alpha(\mathbf{1}_x))_{|x|=n}$ costituiscono un insieme di proiezioni autoaggiunte ortogonali.

Se $C_n(\Omega) = \{G \in C(\Omega);\ G(\omega)$ dipende solo dalle prime n lettere di $\omega\}$ risulta che $\alpha|_{C_n(\Omega)}$ è un omomorfismo di algebre. Si osserva che l'unione delle $C_n(\Omega)$ è densa in $C(\Omega)$. ◻

3 Dimostrazione della proposizione principale

3.1 Operatori di rango 1

Se $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$, si definisce $v_1 \otimes \bar{v}_2$, un operatore di rango 1, secondo

$$(v_1 \otimes \bar{v}_2)(w) = \langle w, v_2 \rangle v_1$$

Si osserva che la disuguaglianza (GVB) per v_0 equivale a

$$\sum_{|x|=n} (\pi(x)v_0) \otimes \overline{(\pi(x)v_0)} \leq \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \tag{GVB'}$$

Lemma 7. *Se π è una rappresentazione di Γ su $\mathcal{H}$, allora*

$$\pi(x)(v_1 \otimes \bar{v}_2)\pi(x^{-1}) = (\pi(x)v_1) \otimes \overline{(\pi(x)v_2)}$$

Lemma 8. *Se $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è un operatore non negativo e se $v \in \mathcal{H}$, allora*

$$(Q^{1/2}v) \otimes \overline{(Q^{1/2}v)} \leq |v|^2 Q$$

Dimostrazione. Sia $w \in H$. Allora

$$\begin{aligned}\langle (Q^{1/2}v) \otimes \overline{(Q^{1/2}v)}w, w\rangle &= |\langle Q^{1/2}v, w\rangle|^2 \\ &= |\langle v, Q^{1/2}w\rangle|^2 \leq |v|^2 |Q^{1/2}w|^2 = |v|^2 \langle Qw, w\rangle\end{aligned}$$

□

3.2 La dimostrazione

Sia π una rappresentazione di Γ, sia (ι, π') una realizzazione non perfetta di π, e sia $\alpha : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la mappa definita dall'equazione (3).

Secondo il Lemma 6, esiste $a \in A$ tale che $P = \alpha(\mathbf{1}_a)$ non è una proiezione. Comunque P è un operatore autoaggiunto, e $0 \leq P \leq \alpha(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. Si sceglie $v \in H$ con $|v| = 1$ tale che $v_0 = (P - P^2)^{1/2}v$ non si annulla. Secondo il Lemma 8,

$$v_0 \otimes \bar{v}_0 \leq P - P^2 \leq \begin{cases} P = \alpha(\mathbf{1}_a) \\ \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P = \alpha(\mathbf{1} - \mathbf{1}_a) \end{cases} \tag{4}$$

Sia $x \in \Gamma$. Supponiamo che la parola ridotta per x finisca con la lettera a^{-1}. Allora, usando la seconda delle disuguaglianze (4), i punti 7 e 4 del Lemma 3, e il Corollario al Lemma 1, si trova

$$\begin{aligned}\pi(x)(v_0 \otimes \bar{v}_0)\pi(x^{-1}) &\leq \pi(x)\alpha(\mathbf{1} - \mathbf{1}_a)\pi(x^{-1}) \\ &= \alpha(\lambda(x)(\mathbf{1} - \mathbf{1}_a)) \leq \alpha(\mathbf{1}_x)\end{aligned}$$

Se al contrario l'ultima lettera di x non è a^{-1}, si può dimostrare ancora che $\pi(x)(v_0 \otimes \bar{v}_0)\pi(x^{-1}) \leq \alpha(\mathbf{1}_x)$, usando la prima delle disuguaglianze (4). Risulta per ogni n che

$$\sum_{|x|=n} \pi(x)(v_0 \otimes \bar{v}_0)\pi(x^{-1}) \leq \sum_{|x|=n} \alpha(\mathbf{1}_x) = \alpha(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

Secondo il Lemma 7 questo vuol dire che v_0 soddisfa la disuguaglianza (GVB') e quindi la disuguagianza (GVB). Questo conclude la dimostrazione della Proposizione Principale.

Riferimenti bibliografici

[FT–Ne] FIGÀ-TALAMANCA A., NEBBIA C., *"Harmonic Analysis and Representation Theory for Groups Acting on Homogeneous Trees"*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **162**, Cambridge University Press, Cambridge (1991)

[KuSt1] KUHN G., STEGER T., *"More irreducible boundary representations of free groups"*, Duke Math. J. **82** (1996), 381–436.

[KuSt2] KUHN G., STEGER T., *"Monotony of certain free group representations"* (in preparazione)

[PenSt] PENSAVALLE C., STEGER T., *"Tensor products with anisotropic principal series of free groups"*, J. Funct. Anal. **140** (1996), 1–22.

Tim Steger
Instituto di Matematica e Fisica
Università degli Studi di Sassari
Via Vienna, 2
07100 SASSARI
Posta-E: `steger@ssmain.uniss.it`

Pervenuta in Redazione il 23.06.1997